
CC1 Algèbre
Durée : 1 h 30 min

L'épreuve est sans document et sans appareil électronique.
Il sera tenu compte du soin, de la rédaction et de la présentation lors de l'évaluation.

Exercice 1. **4 points**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^2 \leq p(x_1^2 + \cdots + x_p^2)$.
2. Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 2. **4 points**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels Ker u et Im u sont orthogonaux.
3. En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u$.

Exercice 3. **13 points**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $\dots$, $P_n = X^n$ les vecteurs de la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose $\langle P|Q\rangle := \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P|Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $P \in E$. Calculer $\langle P|P_0\rangle$.
3. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j = \displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.
   a. Calculer, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i)$ (on distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$).
   b. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$.
   c. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E qui est de plus orthonormée.
   d. Soit $P \in E$. Ecrire la décomposition de P suivant les vecteurs de la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $H := \left\{ P \in E \;\middle|\; \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0 \right\}$.
   a. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, déterminer son orthogonal $H^\perp$ pour $\langle\ |\ \rangle$ et préciser les dimensions de H et de $H^\perp$.
   b. Soit $Q \in E$. Déterminer la projection orthogonale de Q sur $H^\perp$ et calculer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.
5. La base orthonormée $\mathscr{B}$ est-elle la base obtenue par orthonormalisation de la base canonique de E suivant le processus de Gram-Schmidt ?