Département de Mathématiques — Université de Strasbourg

L2 S4 Math-Eco/Math-Santé — *Printemps 2022*

CC2 Algèbre

Durée : 1 h 30 min

L'épreuve est sans document et sans appareil électronique.

Il sera tenu compte du soin, de la rédaction et de la présentation lors de l'évaluation.

Question de cours. **3 points**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Rappeler la définition de l'orthogonal de F, noté $F^{\perp}$.
2. Démontrer que si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Exercice 1. **7 points**

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-2, 1)$. Expliciter une telle matrice P et son inverse.
2. La matrice A est-elle symétrique positive ? Justifier la réponse.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles la matrice A^n est symétrique positive.

Exercice 2. **8 points**

On considère $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de norme associée $\| \cdot \|$. Soient $v \in E \backslash \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} u : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + \lambda \langle x, v \rangle v. \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. a. Pour $x \in E$, calculer $\|u(x)\|^2$.
   b. En déduire que u est un endomorphisme orthogonal de E si et seulement si $\lambda \in \left\{0, -\frac{2}{\|v\|^2}\right\}$.
3. Dans la suite, on supposera que $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$.
   a. Montrer que les valeurs propres réelles d'un endomorphisme orthogonal sont incluses dans $\{-1, 1\}$.
   b. En déduire que u est une symétrie de E.
   c. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et préciser complètement la nature de l'application u.

Exercice 3. **4 points**

Déterminer, en prenant le soin de détailler le raisonnement et les calculs,

$$\inf \left\{ \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$