L1 Physique et Sciences de l'ingénieur — Université de Strasbourg

Xavier Friederich

L1 S1 - Mathématiques pour les sciences — *Automne 2018*

Feuille d'exercices

– Nombres complexes, trigonométrie et applications. –

Exercice 1 —
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $\dfrac{3+6i}{3-4i}$ *b)* $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{-1+6i}{3-4i}$ *c)* $\dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

d) $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ *e)* $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ *f)* $\dfrac{1}{(1+2i)(i-3)}$

Exercice 2 —
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $1-i$ *b)* $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ *c)* $\dfrac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)}$, pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ *d)* $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exercice 3 —
Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on a l'équivalence :

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, z_2 = i\lambda z_1.$$

Exercice 4 —
Calculer $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 —
Déterminer l'ensemble des triplets (u, v, w) de nombres complexes de module 1 tels que $u + v + w = uvw = 1$.

Exercice 6 —
Calculer les racines carrées de $5 + 12i$ et $46 - 14i\sqrt{3}$ sous forme algébrique.

Exercice 7 —
Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ et en déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 8 —
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^2 + z + 1 = 0$ *b)* $z^2 - (1+2i)z + i - 1$ *c)* $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

d) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ *e)* $z^2 + 2iz - 5 = 0$ *f)* $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$

Exercice 9 —
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - (8-i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.
2. En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 —
Factoriser le trinôme $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 —
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ *b)* $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$ *c)* $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$ *d)* $z^5 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 12 —
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 —
Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) > 0\} & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 14 —
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et soit $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$.
Montrer que l'application $\phi_a : z \longmapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ vérifie $\phi_a(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Exercice 15 —
Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

1. $|z-3| = |z-3i|$
2. $|2-3i+z| = |2+3i|$
3. $|\overline{z}-4+i| = 1$
4. $|z-1| < |z+1-2i|$
5. $\arg(\overline{z}) = \arg(-2z)\ [2\pi]$
6. $\arg(\overline{z}+2) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
7. $\arg(z-2) = \arg(z+i)\ [2\pi]$.

Exercice 16 —
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points du plan d'Argand-Cauchy d'affixes z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient sur un même cercle de centre l'origine.

Exercice 17 —
1. Trouver l'ensemble des points M du plan complexe d'affixes z tels que $\left(\dfrac{z-i-1}{iz+1}\right)^2 \in \mathbb{R}$.
2. Trouver l'ensemble des points M du plan complexe d'affixes z tels que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$.
3. Trouver l'ensemble des points M du plan complexe d'affixes z tels que $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

Exercice 18 —
Calculer les sommes suivantes (les résultats seront donnés sous forme factorisée), où $t \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kt)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\cos^k(t)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kt)$

Exercice 19 —
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n(x) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

1. Montrer que D_n est une fonction paire, 2π-périodique et calculer $D_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $K_n(x) := \sum_{k=0}^{n} D_k(x)$. Calculer $K_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que K_n est une fonction à valeurs positives.

Exercice 20 —
Linéariser $\cos^4(\theta)$, $\sin^4(\theta)$, $\sin^5(\theta)$, $\cos^7(\theta)\sin^4(\theta)$.

Exercice 21 —
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes.

a) $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ *b)* $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ *c)* $\cos(3x) = -\sin(x)$

Exercice 22 —
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\cos(nx)$ peut s'écrire comme un polynôme de degré n en $\cos(x)$. Préciser le coefficient dominant de ce polynôme.

Exercice 23 —
On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En utilisant astucieusement $A = (1+1)^n$, $B = (1+j)^n$ et $C = (1+j^2)^n$, calculer $\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)} \binom{n}{3k}$.

Exercice 24 —
Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) u_n(x)$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 25 —
On considère une roue de vélo en position verticale qui se déplace horizontalement le long d'un axe au cours du temps t. On se donne un plan d'Argand-Cauchy de sorte qu'à l'instant initial $t = 0$, la roue coïncide avec le cercle de centre i et de rayon 1 et que le centre C de la roue ait pour affixe $t + i$ à l'instant t. On note alors M le point de la roue qui coïncide avec l'origine à l'instant initial et on étudie la trajectoire suivie par M au cours du temps. On note aussi A le point de contact de la roue avec l'axe des abscisses (A est repéré par son affixe égale à t à l'instant t).

1. Expliquer pourquoi, à l'instant t, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = -t\ [2\pi]$ (en radians).
2. En déduire l'affixe (à l'instant t) du vecteur $\overrightarrow{CM}$ en fonction de t puis établir que l'affixe de $\overrightarrow{IM}$ à l'instant t vaut $(t-1) + (1 - e^{-it})i$, où I est le point d'affixe 1.
3. Déduire à quel instant t la position de M est la plus proche de I.