Feuille d'exercices

– Calculs de primitives et intégration. –

Exercice 1 —
Chercher une primitive sur un intervalle que l'on précisera des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^4 - 3x^3 + 2x + \frac{1}{2}$ *b)* $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}x + 5$ *c)* $x \longmapsto -x^7 - \frac{1}{3}x^2$

d) $x \longmapsto x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}}$ *e)* $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ *f)* $x \longmapsto x^5 - \sqrt{2x}$

g) $x \longmapsto \frac{1}{2x^2}$ *h)* $x \longmapsto -\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^{11}}$ *i)* $x \longmapsto \frac{4}{x^5}$

Exercice 2 —
Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-3}$ sur $]3, +\infty[$ qui s'annule en 5.

Exercice 3 —
Chercher une primitive sur un intervalle que l'on précisera des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (2x+1)^5 - \frac{1}{4}(-x+3)^2$ *b)* $x \longmapsto \frac{1}{3}x(2x^2+1)^2$ *c)* $x \longmapsto \frac{4}{3}(1 - \frac{2}{3}x)^3$

d) $x \longmapsto \frac{2}{(x-1)^3}$ *e)* $x \longmapsto \frac{1}{(2x+1)^6} + 1$ *f)* $x \longmapsto \frac{2}{(2-\sqrt{2}x)^2}$

g) $x \longmapsto \frac{2}{x-1}$ *h)* $x \longmapsto \frac{1}{-2x+1}$ *i)* $x \longmapsto \frac{2x}{(2-x^2)^2}$

j) $x \longmapsto \frac{x^2+2}{x^3+6x}$ *k)* $x \longmapsto \frac{1+2x^2}{x^3} + 1$ *l)* $x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3}$

Exercice 4 —
Chercher une primitive sur un intervalle que l'on précisera des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \cos(2x) - \sin(x+3)$ *b)* $x \longmapsto \cos^2(x)$ *c)* $x \longmapsto x^2\cos(x^3)$

d) $x \longmapsto \cos^3(x)$ *e)* $x \longmapsto \sin^2(x) - \sin^3(x)$ *f)* $x \longmapsto 2\sin^5(2x+1)$

g) $x \longmapsto \sin(x)\cos^4(x)$ *h)* $x \longmapsto \sin^3(x)\cos^2(x)$ *i)* $x \longmapsto \frac{\cos(x)}{-\sin(x)+2}$

Exercice 5 —
En intégrant par parties, déterminer une primitive sur un intervalle que l'on précisera des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto xe^x$ *b)* $x \longmapsto 2xe^{-2x+1}$ *c)* $x \longmapsto (x-1)\sin(x+1)$

d) $x \longmapsto \ln(x)$ *e)* $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$ *f)* $x \longmapsto (x^2+x)e^{4x}$

g) $x \longmapsto x^3e^x\sin(x)$ *h)* $x \longmapsto x\ln(x)$ *i)* $x \longmapsto x^2(1-x)^5$

Exercice 6 —
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$. Calculer I_1 et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

Exercice 7 —
On pose, pour tout réel positif a et tout entier naturel n, $I(a,n) := \int_0^1 x^a(1-x)^n dx$.

1. Déterminer une relation entre $I(a+1,n)$ et $I(a,n+1)$.
2. Calculer $I(a,n) - I(a,n+1)$.
3. En déduire $I(a,n+1)$ en fonction de $I(a,n)$ puis donner une expression de $I(a,n)$.

Exercice 8 (Intégrales de Wallis) —
On pose, pour tout entier naturel n, $W_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

1. Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
2. En déduire une espression de W_{2p} et W_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 —
En utilisant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$, où $a > 0$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\text{Arctan}(x)dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{(\ln(x))^n}{x}dx$, où $n \in \mathbb{N}$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\text{Arcsin}(x)}{1-x^2}}dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)dx$

Exercice 10 —
Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-3}$ puis en déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x(x-3)}$ sur $]0,3[$.

Exercice 11 —
Chercher une primitive de :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x-i}$ sur un intervalle à préciser.
2. $x \longmapsto \dfrac{2x+2}{x^2+x+1}$ sur un intervalle à préciser.
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1+i}$ sur un intervalle à préciser.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+3x+3)^2}$ sur un intervalle à préciser.
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ sur un intervalle à préciser.