L1 Physique et Sciences de l'ingénieur

L1 S1 - Mathématiques pour les sciences

Université de Strasbourg
Xavier Friederich
Automne 2018

Feuille d'exercices

– Equations différentielles linéaires. –

Exercice 1 —

Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = -4y$ *b)* $y = -5y'$ *c)* $3y' + 2y = 0$

d) $\ln(2)y' + y = \ln(2)$ *e)* $y' - \frac{1}{3}y = \frac{5}{3}$ *f)* $2y' = -5$

Exercice 2 —

Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer les solutions de $\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y'(0) \end{cases}$.

Exercice 3 —

Intégrer les équations différentielles suivantes.

a) $y' - 2y = t^2$ *b)* $y' + y = 2\sin(t)$ *c)* $-y' + y = (t+1)e^t$

d) $y' + \ln(3)y = t - e^{-t}$ *e)* $2y' - y = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ *f)* $y' = -\sqrt{2}y + t^3$

Exercice 4 —

1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

   a) $y' = \frac{1}{t^2+1}y$ *b)* $-2y' = \ln(t)y$ *c)* $y' - e^t\cos(t)y = 0$

2. Chercher les solutions aux problèmes suivants.

   a) $\begin{cases} y' = \sin(2t)y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y' = (t^2-1)y \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} (1+t^2)y' + 2ty = 0 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} (1-t^2)y' = (2-t)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} (1-t^2)y' = (2-t)y \\ y(2) = -1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} y' + e^{t^2}y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 5 —

Résoudre les équations différentielles suivantes (sur des intervalles à préciser).

a) $y' - \frac{2}{t}y = (t+1)^2$ *b)* $y' + \tan(t)y = -\sin(2t)$ *c)* $y' + 4t^3y = -\sin(t) + 4t^3\cos(t)$

d) $ty' + 3t = \frac{1}{1-t^2}$ *e)* $y' - ty = te^{t^2}$ *f)* $(1+t^2)y' = -2ty + \frac{1}{t}$

Exercice 6 —

Intégrer les équations différentielles suivantes et déterminer les solutions maximales.

a) $t(1-t)y' + y = t$ *b)* $(t-1)y' + y = \ln|t|$

c) $ty' - 2t = t^3$ *d)* $(1-t^2)y' + ty = \frac{1}{t} + t\ln(t) - t$

Exercice 7 —

Déterminer les solutions à valeurs complexes puis à valeurs réelles de :

1. $y'' + y' + y = 0$
2. $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$
3. $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.
4. $y'' + 4iy' + 5y = 0$.

Exercice 8 —
Intégrer les équations différentielles suivantes.

a) $y'' + 2y' + y = 2(t^2 + t + 1)e^t$ *b)* $y'' - 5y' + 6y = te^{-2t}$ *c)* $y'' = -2y' + 3y - (e^t + e^{-t})$
d) $-2y'' + 8y' - 8 = \sin^2(t)e^{2t}$ *e)* $y'' + 2y + y = (2t+3)\cos(t)$ *f)* $y'' - 2y' + 5y = -t^2 + t$

Exercice 9 —
Résoudre les problèmes suivants.

a) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y'' + 6y' + 25y = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} y'' - 5y' = (t^2+1)e^{5t} \\ y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}\sin^3(x) \\ y(0) = \pi \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = te^{2t}\cos(3x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 2y'' = \ln(t) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$

Exercice 10 —
Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x$.