Feuille d'exercices 1

– Chapitre 1 : Intégrales de Riemann. –

INTÉGRALES DE FONCTIONS EN ESCALIERS

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 2 & \text{si } x = 1; \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1°. f est-elle une fonction en escalier ? Dessiner son graphe.
2°. Lesquelles de ces subdivisions sont-elles adaptées à f : $\sigma_1 = \{0,2,4\}$, $\sigma_2 = \{0,1,2,4\}$, $\sigma_3 = \{0,1,2,3,4\}$? Laquelle est la plus fine ?
3°. En utilisant une subdivision adaptée, calculer $\int_0^4 f(x)dx$.
4°. On considère maintenant la fonction g définie sur $[0,4]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 2; \\ 0 & \text{si } x = 2; \\ 2 & \text{si } 2 < x \leq 3; \\ -2 & \text{si } 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

a. Calculer $\int_0^4 g(x)dx$. Donner la valeur de $\int_0^4 f(x)dx + \int_0^4 g(x)dx$.
b. Donner une subdivision σ adaptée à $f+g$.
c. Calculer $\int_0^4 (f(x)+g(x))\,dx$ en utilisant la subdivison σ.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = 2 \text{ si } -1 \leq x < 0; -1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1.$$

Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $f_+(x) = \max(f(x),0)$ et $f_-(x) = \min(f(x),0)$.
1°. Vérifier que f_+ et f_- et sont deux fonctions en escalier.
2°. Calculer $\int_{-1}^1 f_+(x)dx$ et $\int_{-1}^1 f_-(x)dx$.
3°. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$ et $|f(x)| = f_+(x) - f_-(x)$.
4°. Calculer les intégrales $\int_{-1}^1 f(x)dx$ et $\int_{-1}^1 |f(x)|dx$.

Exercice 3. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x. Calculer $\int_0^3 \lfloor x \rfloor dx$, puis $\int_0^b \lfloor x \rfloor dx$ pour un réel $b > 0$.

Exercice 4. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x^2 \rfloor\right)$ est en escalier sur $[0, 2]$ et calculer son intégrale.

CALCUL D'INTÉGRALES

Calcul direct en en utilisant des primitives

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1}\, dx, \qquad \int_2^3 \sqrt{x-1}\, dx,$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(e^x)\, dx, \qquad \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx, \qquad \int_2^4 \frac{dx}{x \ln x},$$

En utilisant des changements de variables

Exercice 6. En utilisant le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer l'intégrale $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\, dx, \qquad \int_1^2 \frac{1}{3+e^{-x}}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx,$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\, dx,$$

Exercice 8. Calculer les intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arctan}(x) dx$ et $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)} dx$.

En utilisant l'intégration par parties

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 x\ln x\,dx,\qquad \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,dx,\qquad \int_{-\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{Arcsin}(x)\,dx,$$

$$\int_{-1}^1 (x+2)e^{x-1}\,dx,\qquad \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)e^{2x}\,dx,\qquad \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{sh}(x)\,dx.$$

Exercice 10. Pour $a\in\mathbb{R}^+$ et $n\in\mathbb{N}$ on pose $I(a,n)=\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^n dx$.

1. Trouver une relation entre $I(a+1,n)$ et $I(a,n+1)$.
2. Calculer $I(a,n)-I(a,n+1)$.
3. En déduire une expression de $I(a,n+1)$ en fonction de $I(a,n)$ puis donner une expression de $I(a,n)$.

En trouvant vous-mêmes la méthode de calcul

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx,\qquad \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,\qquad \int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx,$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx,\qquad \int_1^e x^2\ln x\,dx,\qquad \int_0^3 \frac{2}{3+e^x}\,dx,$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,\qquad \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,\qquad \int_0^4 \mathrm{ch}(x)\cos(x)\,dx,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)\,dx,\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x)\cos^{11}(x)\,dx\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\cos(x))(1+\sin(x))}\,dx,$$

SOMMES DE RIEMANN

Exercice 12. On note $f(x)=x^2$ pour tout $x\in\mathcal{R}$. Soit $b>0$. On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b x^2dx$ sans utiliser de primitive.

1°. Montrer que pour tout $n\in\mathcal{N}^*$, on a :

$$\sum_{j=1}^n j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2°. En considérant les sommes de Riemann de f sur $[0, b]$, calculer $\displaystyle\int_0^b x^2 dx$.

Exercice 13. 1°. Montrer que pour tout $n \in \mathcal{N}^*$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \sin(jx) = \frac{\sin(\frac{n}{2}x)\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2°. En considérant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)dx$.

Exercice 14. Montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin(\frac{k\pi}{n})$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt[n]{e^{-k}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(n+p)\right)^{\frac{1}{n}}$
7. $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2n^2+kn}{n^2+(n+k)^2}}{\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\frac{k}{n}}}$
8. $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 15 (Intégrales de Wallis.)**.** On pose pour tout entier naturel n : $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
2. Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ puis en déduire une expression de W_{2p} et W_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Après avoir calculé nW_nW_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montré que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$, proposer un équivalent de W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

1. Montrer que $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$.
2. Applications :
   — Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^x > \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   — Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exercice 17. Calculer leur primitives suivantes et en donner l'ensemble de définition :

$\displaystyle\int \frac{1}{x-i}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\, dx$,

$\displaystyle\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^3}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-6x+4}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{x^n-1}\, dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^2(x)\, dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)}$ $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^4(x)\, dx$,

$\displaystyle\int \mathrm{ch}^3(x)\mathrm{sh}^4(x)\, dx$, $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{2+3\sin(x)}\, dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)}$,

Exercice 18. Dire, en le justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux.
2. La fonction $\begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.
3. La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout segment.
4. Une fonction définie sur [0,1] est continue si et seulement si elle est uniformément continue.
5. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
6. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est stable par produit.
7. L'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est stable par prise de la valeur absolue.
8. Pour toutes fonctions en escalier $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[0,1]} fg = \int_{[0,1]} f \times \int_{[0,1]} g$.
9. Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors f est bornée.

Exercice 19. Soient $a < b$ deux réels.

1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
2. Le résultat est-il encore vrai si l'on suppose seulement f à valeurs dans $\mathbb{C}$?
3. Le résultat est-il encore vrai si l'on suppose seulement f continue par morceaux ?

Exercice 20. Soient $a < b$ deux réels.

1. Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs positives telle que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $[a,b]$.
2. Le résultat est-il encore vrai si f n'est pas supposée à valeurs positives ?