Feuille d'exercices 2
– Chapitre 2 : Intégrales généralisées. –

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales suivantes et calculer leur valeur lorsqu'elles sont convergentes :
$\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$; $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$; $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{|x-1|^{1/3}}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\exp\left(-x^2\right)dx$;
$\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)}$; $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1+\ln(x))\,x^{-x}dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$;
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\tan(x)}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx$.

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales suivantes :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin(\tfrac{1}{x})\,dx$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x}\,dx$,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})\,dx$.

Exercice 3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 4. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}} - 1\right) \mathrm{d}x$ est convergente.

Exercice 6. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx$ converge. Prouver ensuite que $I = 0$.

Exercice 7. 1°. Calculer $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{\log(x)}{x}\, dx$.

2°. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x}\, dx$ converge-t-elle ?

Exercice 8. Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer toutes les valeurs du paramètre $\alpha \geq 0$ pour lesquelles l'intégrale est convergente.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha \ln x dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+x^\alpha)\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+x^\alpha) - \alpha \ln x\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}\, dx$

Exercice 9. 1°. Etablir la convergence de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$

2°. Pour $\epsilon > 0$, on pose $I_\epsilon := \displaystyle\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$. Montrer que $I_\epsilon = \displaystyle\int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$

3°. Déterminer $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon$, et en déduire la valeur exacte de I.

Exercice 10. On définit la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma\,:\,x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\Gamma(x)$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
3. En déduire la relation $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathcal{N}$. En ce sens la fonction gamma généralise la notion de factorielle aux réels positifs.
4. Montrer que Γ est continue sur $\mathcal{R}_{>0}$.

Exercice 11. On veut montrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{\pi}{2}\,.$$

1. Montrer que l'intégrale généralisée ci-dessus est semi-convergente.
2. Soit $f\,:\,\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathcal{R}$ une fonction continue et de classe C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 0\,.$$

3. Pour $n \in \mathcal{N}$ on pose

$$J_n \quad := \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)\,x)}{\sin x}\mathrm{d}x\,.$$

   (a) Montrer que pour tout n cette intégrale généralisée est convergente.

   (b) Etablir la relation

$$\sin((2n+1)\,x) - \sin((2n-1)\,x) \quad = \quad 2\sin x\cos(2nx)\ .$$

   (c) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathcal{N}}$ est constante et que $J_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathcal{N}$.

4. Prouver, en effectuant le changement de variables adéquat, que

$$K_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)\,x)}{x}\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\,.$$

5. On définit la fonction

$$g \,:\, x \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad \mapsto \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \,.$$

   Montrer que g se prolonge par continuité en 0 (on donnera la valeur de $g\,(0)$ ainsi obtenue).

6. Conclure.