Feuille d'exercices 3

– Chapitre 4 : Séries numériques –

Exercice 1. On considère les séries numériques suivantes :

1°. $u_n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2°. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$;

3°. $u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

4°. $u_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n\,(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5°. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Pour chacune de ces séries, calculer les sommes partielles, étudier la convergence de la série et caculer sa somme lorsqu'elle converge.

Exercice 2 (Séries de Riemann)**.** On appelle *série de Riemann* une série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1°. **Cas** $\alpha \leq 0$. Montrer que la série diverge grossièrement.

2°. **Cas** $0 < \alpha \leq 1$.

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

b. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \geq \ln(k+1).$$

c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$?

3°. **Cas** $\alpha > 1$.

a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

b. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$?

Exercice 3 (Séries de Bertrand)**.** On appelle *série de Bertrand* une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec α, $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$.

1°. Montrer que si $\alpha < 0$ alors la série diverge grossièrement.

2°. Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, alors la série diverge.

3°. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge.
4°. On étudie maintenant le cas $\alpha = 1$.
a. Montrer que si $\beta < 0$, alors la série diverge.
b. On suppose maintenant $\beta \geq 0$. En encadrant la série par des intégrales, montrer qu'elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, la série $\sum_n u_n$ est-elle convergente ?
1°. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $n \in \mathbb{N}$;
2°. $u_n = \left(\dfrac{2^n + n}{3^n}\right)$
3°. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.
4°. $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
5°. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$;
6°. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$;.
7°. $u_n = \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.
8°. $u_n = \dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Exercice 5. Etudier la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants :
1°. $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{2^n}$;
2°. $u_n = \dfrac{1 + \cos n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$;
3°. $u_n = \mathrm{e}^{-n} \cos n$, $n \in \mathbb{N}$;
4°. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$;
5°. $u_n = \sin\left(\left(\dfrac{1}{n} + n\right)\pi\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
6°. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
7°. $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
8°. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
9°. $u_n = \dfrac{\cos^2 n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
10°. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \geq 2$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t\,.$$

1°. Etude de (a_n).

a. Quel est le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Etablir une relation entre a_n et a_{n+2}. En déduire la limite de (a_n).

d. Montrer l'inégalité, pour $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leq 2a_n \leq \frac{1}{n-1}$$

et donner un équivalent à (a_n).

2°. Etude de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$.

a. Montrer que la série est semi-convergente.

b. Montrer que, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan t}\mathrm{d}t - (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/4} \frac{(\tan t)^{n+1}}{1+\tan t}\mathrm{d}t\,.$$

c. En déduire l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan t}\mathrm{d}t\,.$$

d. Calculer l'intégrale ci-dessus.

Exercice 7. 1°. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

2°. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a :$S_n(t) = \dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}}{1+t^2}$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}$.

d. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

3°. En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8.
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue, positive et décroissante.
1°. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

2°. On note $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt$. Montrer que la série (u_n) converge et que sa limite l vérifie $l \in [0, f(1)]$.
3°. Applications :
a. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in [0,1]$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
b. Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in [1,2]$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - \alpha + o(1)$.

Exercice 9. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{n^n a^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

1°. On suppose que $a \neq e$. Etudier la convergence de la série $\sum_n u_n$.
2°. On suppose que $a = e$, c'est-à-dire $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. On pose $w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
a. Montrer que la série $\sum_n w_n$ est convergente.
Indication : Utiliser le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.
c. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n! \sim C\sqrt{n} n^n e^{-n}.$$

Exercice 10.
1°. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_n w_n$ sont de même nature. En cas de convergence, quelle est la relation entre $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$?
2°. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $y_n = \dfrac{x_n}{1+x_n}$. Montrer que les séries $\sum_n x_n$ et $\sum_n y_n$ sont de même nature.