Université de Strasbourg,
Département de Mathématiques Analyse S3 - Topologie dans $\mathbb{R}^n$.

Feuille 3 : Applications continues entre e.v.n.

Exercice 1 Donner le domaine de définition de f et étudier sa limite au point $(0,0)$ dans chacun des cas suivants :
1°. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
2°. $f(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\max(|x|^2,|y|)}$;
3°. $f(x,y) = \frac{x^5y^7}{x^2+3|y|^3}$.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
1°. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
2°. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
3°. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$;
4°. $f(x,y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$; $f(x,0) = 0$;
5°. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, si $x \neq 0$, $f(0,y) = y$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
1°. $f(x,y) = (x^2 \sin y, e^y + 2x)$;
2°. $f(x,y) = \left(\sqrt{|xy|} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$;
3°. $f(x,y) = \left(\frac{\sin(xy)}{x}, \frac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$; $f(0,y) = (y,1)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y,\ g(x,x) = f'(x).$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Montrer que la fonction $f(x,y) = |x^2 - y^2|$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme $\|(x,y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$. Soit A un fermé de E et $f : A \to F$ une application continue. Montrer que le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in A\}$, est un fermé de $E \times F$.

Exercice 7 Soient E et F deux espaces vectoriels normés st $f : E \to F$ une application continue.
1°. Montrer que pour tout $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2°. Montrer par un exemple que l'inclusion peut être stricte.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue.
1°. On suppose que

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0).$$

2°. On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geq 0$ et que

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x, y) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Exercice 9 On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$.
1°. Montrer que f est uniformément continue sur $B'(0, 1)$.
2°. Montrer que f est lispchitzienne sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$.
Indication : Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi(t) = t^{\frac{1}{3}}$.
3°. Déduire de ce qui précède que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< a, x >= \sum_{j=1}^n a_j x_j$.
1°. Vérifier que f est une application linéaire continue.
2°. Déterminer sa norme, que l'on notera $|||f|||_\infty$.
3°. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Déterminer la norme de f notée $|||f|||_1$.
4°. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Déterminer la norme de f notée $|||f|||_2$.

Exercice 11 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par, pour tout $A = (a_{j,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que l'application

$$\phi \ : \ M \to Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

est une application linéaire continue de et calculer sa norme $|||\phi|||$.

Exercice 12 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que les applications ϕ et ψ définies sur E par

$$\phi(f) = f(0); \ \psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

sont des applications linéaires continues et déterminer leur normes.