Université de Strasbourg,
Département de Mathématiques

Analyse S3 - Topologie dans $\mathbb{R}^n$.

Feuille 1. NORMES

Exercice 1 (Propriétés de la valeur absolue) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1°. Montrer que $|x+y| \leq |x|+|y|$. Sous quelles hypothèses sur x et y a-t-on $|x+y| = |x|+|y|$?

2°. Montrer que $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et la norme euclidienne) Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On considère $P(\lambda) = \|\lambda x + y\|_2^2 =< \lambda x + y, \lambda x + y >$.

1°. Vérifier que $< x, y >=< y, x >$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$,

$$< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >$$

2°. Écrire $P(\lambda)$ sous la forme

$$P(\lambda) = A(x, y)\lambda^2 + 2B(x, y)\lambda + C(x, y)$$

en explicitant $A(x, y)$, $B(x, y)$ et $C(x, y)$.

3°. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|< x, y >| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

4°. Montrer que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 (Comparaison des 3 normes usuelles) On reprend les notations de l'exercice précédent et celles du cours.

1°. Montrer que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités suivantes :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty;$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty;$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Montrer que chacune de ces inégalités est optimale.

2°. Que peut-on dire de ces trois normes ?

3°. Dessiner la boule unité associée à chacune de ces trois normes.

Exercice 4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x+y\|$.

Exercice 5 [CC1, 2018] On définit les applications suivantes pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$N_1(x) = |x_1 + 2x_2|, \quad N_2(x) = |x|_1 + 2|x_2|, \quad N_3(x) = \sup_{t \in [1,2]} |x_1 + tx_2|.$$

1°. Montrer que N_2 et N_3 définissent deux normes sur $\mathbb{R}^2$.

2°. L'application N_1 définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

3°. Déterminer la boule unité fermée associée à N_2.
4°. Trouver des nombres réels $A > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$,

$$AN_2(x) \leq N_3(x) \leq BN_2(x),$$

Exercice 6 Soit $p > 1$ et $n \geq 2$. Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}.$$

1°. Vérifier que $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2°. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$.
3°. On veut maintenant montrer que l'inégalité triangulaire est vérifiée.
a. Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer l'Inégalité de young :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

b. En déduire l'Inégalité de Hölder : pour tout $A = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \|A\|_p \|B\|_q.$$

Indication : Supposer dans un premier temps que $\|A\|_p = \|B\|_q = 1$.
c. Montrer que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

d. En déduire que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

e. L'inégalité triangulaire est-elle toujours vérifiée si $0 < p < 1$?
4°. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

5°. En déduire la limite quand $p \to +\infty$ de $\|x\|_p$.

Exercice 7 On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on pose

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{i,j}|.$$

1°. Vérifier que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.
2°. Montrer que pour tous $A, B \in E$ on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 8 (Un exemple en dimension infinie)
Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1°. Vérifier que $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont deux normes sur E.
2°. Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$\|f\| \leq \|f\|_\infty.$$

3°. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.