Université de Strasbourg,
Département de Mathématiques Analyse S3 - Topologie dans $\mathbb{R}^n$.

Feuille 2 : Topologie sur les espaces vectoriels normés

1 Ouverts, fermés, intérieurs, adhérences, frontières.

1.1 Dans l'e.v.n. $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

Exercice 1 Soient a et b deux réels tels que $\alpha < \beta$.
1°. Montrer que les ensembles $]\beta, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha[$ sont des ouverts. Montrer qu'il ne sont pas fermés.
2°. Montrer que les ensembles $]-\infty, \alpha]$ et $[\beta, +\infty[$ sont des fermés. Montrer qu'il ne sont pas ouverts.
3°. Montrer que l'ensemble $]\alpha, \beta[$ est un ouvert. Est-il fermé ?
4°. Montrer que l'ensemble $[\alpha, \beta]$ est un fermé. Est-il ouvert ?
5°. Montrer que l'ensemble $]\alpha, \beta]$ n'est ni ouvert, ni fermé.
6°. Déterminer les intérieurs et les adhérences des ensembles définis dans les questions précédentes.

Exercice 2 Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Déterminer leurs intérieurs, leurs adhérences et leurs frontières : $\{0\}$, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Exercice 3 On considère l'ensemble $A = \{0\} \cup]1, 2]$.
1°. L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ? Déterminer $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$.
2°. Déterminer $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{A^c}$, $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A}$, $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ et $(\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus A}})$.
3°. Mêmes questions pour $A = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$.

1.2 Dans l'e.v.n. $\mathbb{R}^2$ muni de l'une des trois normes usuelles (au choix).

Exercice 4 Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Justifier vos réponses. Déterminez leurs intérieurs, leurs adhérences et leurs frontières.
1°. $\{(x_1, x_2)\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
2°. $\{(0, 1)\} \cup \{(1, 2)\}$;
3°. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\}$;
4°. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
5°. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$;
6°. $\mathbb{R} \times \{0\}$.
7°. $\{(x, y) : x = y\}$;
8°. $\{(x, y) : x + y > 0\}$;
9°. $\{(x, 0) : x \in]0, 1[\}$;
10°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq y \text{ et } 2x + 3y \leq 4\}$;
11°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 + x^2 \leq 16\}$;
12°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. ;

Exercice 5 Soit f :$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrez que son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)),\, x > 0\}$ est fermé. Est-ce un ouvert ?

Exercice 6 Soit f :$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)),\, x > 0\}$ est-il fermé ? Déterminez son adhérence.

1.3 Dans E un e.v.n. quelconque

Exercice 7 Soient A et B deux parties de E. Montrer les relations suivantes.

1°. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. L'inclusion inverse est-elle vérifiée en général ?

2°. $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$;
3°. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ L'inclusion inverse est-elle vérifiée en général ?
4°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 8 Soit F un sous-espace vectoriel de E.
1°. Montrez que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2°. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

Exercice 9 Soient U un ouvert de E et V une partie de E.
1°. Montrez que $U + V := \{x + y, x \in U,\ y \in V\}$ est ouvert.
2°. Montrer que $U \cap \overline{V} \subset \overline{U \cap V}$.
3°. Montrez que si $U \cap V = \emptyset$, alors $U \cap \overline{V} = \emptyset$.
4°. Montrer que si $U \cap V = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset$.

Exercice 10 1°. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A), \quad \mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A), \quad \mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A).$$

Donner des exemples montrant que les deux inclusions peuvent être strictes.

2 Compacts

2.1 Dans l'e.v.n. $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

Exercice 11 Les ensembles suivants sont-ils fermés ? Sont-ils compacts ? Déterminer leus adhérences.

1°. $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$
2°. $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$
3°. $\{\exp(1/n) : n \in \mathbb{N}^*\}$.
4°. $\{\log(1/n) : n \in \mathbb{N}^*\}$.

2.2 Dans l'e.v.n. $\mathbb{R}^2$ muni de l'une des trois normes usuelles (au choix).

Exercice 12 Les ensembles suivants sont-ils fermés ? Sont-ils compacts ?
1°. $\{(x, y)\ |x| + |y| \leq 1\}$
2°. $\{(x, y)\ |x + y| \leq 1\}$
3°. $\{(x, y)\ |xy| \leq 1\}$
4°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \geq 5\}$
5°. $\{(x, y)\ x^2 + y^4 \leq 1\}$
6°. $\{(x, y)\ x^2 + y^3 \leq 1\}$
7°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y = e^x\ ,\ -1 < x < 1\}$
8°. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 - 3xy + 10y^2 \leq 1\}$

2.3 Dans E un e.v.n. quelconque

Exercice 13 Soient A et B deux parties de E. On note $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$.
1°. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2°. Montrer que si A est fermé et B et compact, alors $A + B$ est fermé.
3°. Si on suppose A et B fermés, a-t-on nécessairement $A + B$ est fermé ?