Département de Mathématiques | Université de Strasbourg

L2 S4 Math-Eco/Math-Santé - Algèbre *Printemps 2022*

Cours
– ESPACES PREHILBERTIENS REELS –
Enseignant : Xavier Friederich

Introduction - Motivation

Dans le secondaire, l'enseignement de la géométrie est fondé sur les axiomes d'Euclide, avec l'introduction des points, puis des notions d'angle, d'orthogonalité et de distance pour définir les vecteurs, et enfin du produit scalaire à partir des éléments qui précèdent.
Dans ce cours, notre point de départ est la théorie des espaces vectoriels. On va introduire la notion de produit scalaire, puis les autres notions, dans cet ordre. Cela correspond à la théorie des espaces préhilbertiens développée par Hilbert et Schmidt (mathématiciens allemands) au début du XXe siècle. L'avantage est de pouvoir parler de « distance », d'« orthogonalité », de « projection » (et en somme de faire de la géométrie euclidienne) dans des espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Les espaces vectoriels que nous considérerons seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (a priori de dimension quelconque). Nous indiquerons, lorsqu'il y aura lieu, la nécessité de se placer en dimension finie.

1 Espaces préhilbertiens réels

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1. On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

— φ est linéaire à gauche, c'est-à-dire : pour tout $y \in E$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

est linéaire

— φ est linéaire à droite, c'est-à-dire : pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

est linéaire.

Définition 1.2. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute forme bilinéaire φ sur E telle que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Exemple 1.3. L'application $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas symétrique.

Définition 1.4. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que φ est :
- positive si $\forall\, x \in E, \quad \varphi(x,x) \geq 0$
- définie si $\forall\, x \in E, \quad (\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0)$.

Exemple 1.5. L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ qui n'est pas définie. Elle est par contre définie en restriction au sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions continues sur $[0,1]$.

Remarque 1.6. Pour montrer qu'une application φ est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de montrer la propriété de symétrie sur φ et - par exemple - la linéarité à gauche (puisque la linéarité à droite en découle alors immédiatement).

Remarque 1.7. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.8. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors φ est définie et positive (on dit alors que φ est définie positive) si et seulement si

$$\forall\, x \in E\backslash\{0\}, \quad \varphi(x,x) > 0.$$

Définition 1.9. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
Lorsque E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien (réel).
Si en plus E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

Remarque 1.10. Notations usuelles pour désigner le produit scalaire de deux éléments $x, y \in E$: $\langle x, y\rangle$ ou $\langle x|y\rangle$ ou (x,y) ou $(x|y)$.

Exemple 1.11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$

où on note $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de $x \in \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (M,N) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tMN) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 1.13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
L'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 1.14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k,$$

où l'on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 1.15. En particulier, tout espace préhilbertien est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

1.2 Propriétés du produit scalaire

On considère ici un espace préhilbertien réel $(E, \langle , \rangle)$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

qui est bien définie, à valeurs positives et qui vérfie les axiomes d'homogénéité et de séparation des normes.

On va montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

1.2.1 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Proposition 1.16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $\forall\, x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ *avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.*

Proposition 1.17 (Inégalité de Minkowski ou inégalité triangulaire)**.** $\forall\, x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont positivement liés, c'est-à-dire $x = 0$ ou $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$.*

Exemple 1.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.19. Pour tous $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b (f + g)^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.20. *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\| \cdot \|$ est une norme sur E ; on dit que c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.*

1.2.2 Produit scalaire et norme

Proposition 1.21 (Formules de polarisation)**.** *Pour tous $x, y \in E$,*

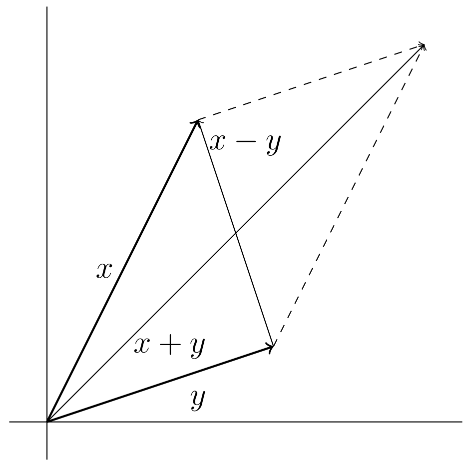
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

Proposition 1.22 (Identité du parallélogramme). *Pour tous $x, y \in E$,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$



1.3 Orthogonalité

1.3.1 Vecteurs orthogonaux

On considère ici un espace préhilbertien réel $(E, \langle , \rangle)$ de norme associée $\|\cdot\|$.

Définition 1.23. Soient x et y deux vecteurs de E. On dit que x est orthogonal à y pour le produit scalaire $\langle , \rangle$ si $\langle x, y\rangle = 0$.

Remarque 1.24. Comme $\langle , \rangle$ est symétrique, x est orthogonal à y ssi y est orthogonal à x. Ainsi on pourra dire dans ce cas que x et y sont orthogonaux.
La relation d'orthogonalité est symétrique, mais ni réflexive, ni transitive.

Remarque 1.25. La relation d'orthogonalité dépend du produit scalaire considéré.
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$,
$\langle , \rangle_1 : (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ est un produit scalaire (produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$)
$\langle , \rangle_2 : (x, y) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2$ est un autre produit scalaire ;
on observe que les vecteurs (1,1) et (1,-1) sont orthogonaux pour $\langle , \rangle_1$ mais pas pour $\langle , \rangle_2$.

Remarque 1.26. Pour tout $x \in E$, le vecteur nul de E est orthogonal à x.

Remarque 1.27. Le vecteur nul est le seul vecteur de E orthogonal à lui-même.

Exemple 1.28. Dans $\mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire donné par $\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$, les polynômes 1 et X sont orthogonaux.
Dans $\mathscr{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire donné par $\langle f, g\rangle := \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$, les fonctions sin et cos sont orthogonales.

1.3.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

On considère ici un espace préhilbertien réel $(E, \langle , \rangle)$ de norme associée $\| \cdot \|$.

Définition 1.29. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ l'ensemble
$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall\, y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$
2. On dit que F et G sont orthogonaux et on note alors $F \perp G$ si
$$\forall\, x \in F, \forall\, y \in G, \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Remarque 1.30. $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition 1.31. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.32. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. $F \perp G \Longleftrightarrow F \subset G^\perp$ *et* $G \subset F^\perp$
2. $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$
3. $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$
4. $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Exemple 1.33. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (M, N) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tMN). \end{array}$$

Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (constitué des matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (constitué des matrices antisymétriques) sont orthogonaux.

Proposition 1.34. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_n$ des vecteurs de E. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$ et $G = \mathrm{Vect}(x'_1, \dots, x'_n)$. Alors*
$$F \perp G \Longleftrightarrow \forall\, (k, l) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\},\ \langle x_k, x'_l\rangle = 0.$$

2 Orthogonalité dans les espaces euclidiens - bases orthonormales

Dans tout ce chapitre, on considère un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$ de norme associée $\| \cdot \|$.

2.1 Familles orthogonales

Définition 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs de E est dite <u>orthogonale</u> si pour tous éléments distincts k et k' de $\{1,\ldots,n\}$, les vecteurs x_k et $x_{k'}$ sont orthogonaux.

2. Une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs de E est dite <u>orthonormale</u> ou <u>orthonormée</u> si pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$, où

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Remarque 2.2. Toute famille orthonormale d'éléments de E est une famille orthogonale.

Proposition 2.3. *Toute famille orthogonale d'éléments de E est une famille libre.*

Exemple 2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $f_k(t) = \cos(kt)$ pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, la famille $\{f_k,\ k \in \{1,\ldots,n\}\}$ est libre dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$.

Théorème 2.5 (Pythagore)**.** *1. Soient $x, y \in E$. Alors $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

2. Soit $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille orthogonale de E. Alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Remarque 2.6. Attention ! La réciproque de l'assertion 2 du théorème précédent est fausse. Contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique : avec $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (-2,0)$ et $e_3 = (-2,1)$, on a

$$\|e_1 + e_2 + e_3\|^2 = 10 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2 \text{ mais } \langle e_1, e_2\rangle \neq 0.$$

Remarque 2.7. Ne pas confondre

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$$

et

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = 0 \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x.$$

2.2 Bases orthonormales

Proposition 2.8 (Existence de bases orthonormales)**.** *Si E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, alors E possède une base orthonormale.*

Proposition 2.9. *Si $(E, \langle,\rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de E, alors*

1. $\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$

2. $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ *où* $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ *et* $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$.

Proposition 2.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. *$F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F dans E qui est orthogonal à F ; on dit que c'est le supplémentaire orthogonal de F dans E.*

Corollaire 2.11. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

Corollaire 2.12. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

Remarque 2.13. Le corollaire précédent n'est vrai qu'en dimension finie.

Exemple 2.14. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.15. Trouver le supplémentaire orthogonal de $F := \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(-1,1,3)\right)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Théorème 2.16 (Complétion en base orthonormée)**.** *Toute famille orthonormale d'éléments de E peut être complétée en une base orthonormale de E.*

2.3 Projections orthogonales

Définition 2.17 (Rappel sur les projections vectorielles)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle projection (vectorielle) de E ou projecteur de E tout endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.

Proposition 2.18. *Si p est un projecteur d'un espace vectoriel E, alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.*

Définition 2.19. Soit p un projecteur de $(E, \langle , \rangle)$. On dit que p est une projection orthogonale (ou un projecteur orthogonal) si $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$.

Remarque 2.20. Si p est un projecteur orthogonal, $\mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$. Il suffit donc de se donner $\mathrm{Im}\, p$ pour caractériser complètement p.
On dira donc simplement « projecteur orthogonal sur F » pour désigner le projecteur orthogonal d'image F parallèlement au noyau $F^{\perp}$; on notera p_F ce projecteur dans la suite du cours.

Proposition 2.21 (Expression de la projection orthogonale en base orthonormée)**.** *Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, \langle , \rangle)$; on suppose que $(e_k)_{1 \le k \le r}$ est une base orthonormée de F. Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.*
Alors $\forall\, x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k\rangle e_k$.

Remarque 2.22. Attention ! Si la base n'est qu'orthogonale, l'image de x par le projecteur orthogonal p_F s'écrit

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

En particulier la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{e_i})$ s'écrit $p_{\mathrm{Vect}(ei)} :\ x \mapsto \frac{\langle x, e_i\rangle}{\|e_i\|^2} e_i$.

Exercice 2.23. Etant donné $(e_k)_{1\leq k\leq r}$ une base d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$, écrire l'expression de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 2.24. Ecrire l'expression de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 2.25 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E.*
Alors il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E telle que

$$\forall\, k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \quad et \quad \langle e_k, \varepsilon_k\rangle > 0.$$

Remarque 2.26. $\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Exercice 2.27. Déterminer une base orthonormale de $E = \mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i)$. Même question avec le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.

2.4 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition 2.28. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $x \in E$. La distance de x à F est le nombre

$$d(x, F) := \inf \{\|x - y\|,\ y \in F\}.$$

Proposition 2.29. *Avec les notations de la définition précédente, la projection orthogonale $p_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.*

Remarque 2.30. Le théorème de Pythagore montre que $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$.

Remarque 2.31. Application à des problèmes d'optimisation.

Exercice 2.32.

1. Déterminer $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (a\cos t + b\sin t - 1)^2\ dt$.
2. Déterminer $\inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2\ dx$.

3 Endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

On considère un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

3.1 Définition, propriétés et exemples

Définition 3.1. Un endomorphisme orthogonal de E est un endomorphisme f de E tel que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Remarque 3.2. On dit qu'un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Exemple 3.3. Id_E, $-Id_E$ sont des endomorphismes orthogonaux.
Une symétrie orthogonale de E (c'est-à-dire un éléments $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = Id_E$ et $\mathrm{Ker}(s - Id_E) \perp \mathrm{Ker}(s + Id_E)$) est aussi un élément de $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 3.4. *Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme de E.*

Remarque 3.5. Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire : si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

La réciproque est fausse! Contre-exemple $h : x \mapsto 2x$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$ qui conserve l'orthogonalité mais ne conserve pas le produit scalaire.

Proposition 3.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$f \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

Remarque 3.7. Un endomorphisme orthogonal de E est donc aussi appelé isométrie vectorielle de E.

Remarque 3.8. Attention! Un projecteur orthogonal de E n'est pas un endomorphisme orthogonal de E, sauf si c'est Id_E.

Exercice 3.9. Montrer qu'une application $f : E \to E$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ est linéaire.

Exercice 3.10. Soit s une symétrie de E, c'est-à-dire $s^2 = Id_E$. Montrer que s est une symétrie othogonale de E si et seulement si s est un endomorphisme orthogonal de E.

Proposition 3.11. *L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ muni de la loi de composition $\circ$ des applications est un groupe, c'est-à-dire :*

- *$\circ$ est une loi interne : si $f, g \in \mathcal{O}(E)$, alors $f \circ g \in O(E)$.*
- *$\circ$ est une loi associative : si $f, g, h \in \mathcal{O}(E)$, alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*
- *$\circ$ possède un élément neutre (qui est Id_E) : si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$.*
- *tout élément de $\mathcal{O}(E)$ possède un inverse dans $\mathcal{O}(E)$: si $f \in \mathcal{O}(E)$, il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$.*

Théorème 3.12. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

1. *$f \in \mathcal{O}(E)$.*
2. *Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E.*
3. *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $f(\mathscr{B})$ soit une base orthonormée de E.*

Proposition 3.13. *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f (c'est-à-dire si $f(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est stable par f.*

3.2 Matrices orthogonales et endomorphismes orthogonaux

Définition 3.14. Une matrice orthogonale de taille $n \geq 1$ est une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = I_n$.

Remarque 3.15. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.16. *Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors M est inversible d'inverse $M^{-1} = {}^t M$.*

Proposition 3.17. *Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.*
De même, les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.18. $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Remarque 3.19. Par contre, si les lignes ou colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une famille orthogonale, la matrice M n'est pas nécessairement orthogonale.

Proposition 3.20. *Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $|\det M| = 1$.*

Proposition 3.21. *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

1. *$f \in \mathcal{O}(E)$*
2. *Pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*
3. *Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Corollaire 3.22. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et soit $\mathscr{B}'$ une base quelconque de E. Alors en notant $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, on a

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathscr{B}' \text{ est une base orthonormée de } E.$$

Corollaire 3.23. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$f \text{ est une symétrie orthogonale de } E \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

3.3 Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Théorème 3.24 (Classification des éléments de $O_2(\mathbb{R})$)**.**

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Remarque 3.25.

$$\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) := \left\{ R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\} = \{M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

est constitué des matrices de rotations.

$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) := \left\{ S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\} = \{M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\}$$

est constitué des matrices de réflexions (ou symétries orthogonales par rapport à une droite).

Corollaire 3.26 (Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2)**.** Si $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est une matrice de la forme R_θ ou S_θ, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

3.4 Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

Lemme 3.27. *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $x \in E \setminus \{0\}$ tels que $f(x) = \lambda x$.*

Théorème 3.28 (Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3)**.** *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et des réels $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \{\pm 1\}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3.5 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Théorème 3.29 (Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3)**.** *Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 du type (γ) avec $\gamma \in \{\pm 1\}$ ou de taille 2 du type*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

4 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si pour tous $x, y \in E$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Définition 4.2. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On dit que :
- u est positif si $\forall\, x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle \geq 0$
- u est défini positif si $\forall\, x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle > 0$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs) de E.

Proposition 4.3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E,* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 4.4. Mise en garde : la caractérisation est valable uniquement en base orthonormée.

Proposition 4.5. *$\mathcal{S}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En particulier,* $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 4.6. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.*
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F}$ est un endomorphisme symétrique de F.

Proposition 4.7 (Caractérisation des projections orthogonales)**.** *Soit p un projecteur de E. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.*

Proposition 4.8 (Caractérisation des symétries orthogonales)**.** *Soit s une symétrie de E. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.*

4.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Lemme 4.9. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u possède une valeur propre réelle.*

Proposition 4.10. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.*

Théorème 4.11 (spectral)**.** *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors*
1. *l'ensemble des valeurs propres complexes de u (noté* $\mathrm{Sp}(u)$*) est inclus dans* $\mathbb{R}$.
2. $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
3. *u est diagonalisable en base orthonormée.*

Remarque 4.12. On dit que les endomorphismes symétriques sont orthodiagonalisables.

Corollaire 4.13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

Corollaire 4.14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP =^t PAP$ est diagonale.

Proposition 4.15. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors*
1. *$u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si* $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$
2. *$u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si* $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

Exercice 4.16 (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif). Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Alors $\exists!\ v \in \mathcal{S}^+(E), \quad u = v^2$.