UFR DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE — UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2 S3 - Analyse - Intégration et Séries numériques — *Automne 2019*

Devoir-Maison 1

- A rendre pour le **jeudi 3 octobre 2019**. –

EXERCICE 1 —

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(f) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k,n})$, où l'on a noté $x_{k,n} := a + k\dfrac{b-a}{n}$.

1. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$,

$$\forall\, t \in [x_{k,n}, x_{k+1,n}], \quad |f(t) - f(x_{k,n})| \leq M(t - x_{k,n}).$$

2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in \{0, ..., n-1\}$, $\quad \left|\displaystyle\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} (f(t) - f(x_{k,n}))\, dt\right| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{2n^2}$,

   puis que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt - (b-a)S_n(f)\right| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$.

3. Application. Calcul d'une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ par la méthode des rectangles.

   On considère dans cette question que $f(x) = e^{-x^2}$.

   (a) Déterminer $\max\limits_{[0,1]} |f'|$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant 2., écrire un algorithme qui calcule une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ à ε près.

EXERCICE 2 —

Soit $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$ et on définit l'application $I :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in]0, 1], \quad I(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

1. Démontrer que $\forall\, n \geq 2$, $\forall\, k \in \{1, ..., n-1\}$, $\quad \dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{k+1}{n}\Big) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\, dx \leq \dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$.
2. Déduire que $\forall\, n \geq 2$, $\quad I\Big(\dfrac{1}{n}\Big) + \dfrac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\Big(\dfrac{1}{n}\Big) + \dfrac{1}{n} f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.
3. On suppose en plus que f est à valeurs positives et que $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = l$ où $l \in \mathbb{R}$.

   Montrer qu'alors $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 0$ puis que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
4. Dans cette question, on prend $f : x \longmapsto \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln(x)$.

   (a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad r_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n}\ln\Big(\dfrac{n!}{n^n}\Big)$. *Indication* : on pourra utiliser, après l'avoir démontré, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $\left(\frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à préciser.