L2 S4 Math-Eco/Math-Santé - Algèbre *Printemps 2022*

Feuille d'exercices
– Algèbre : Espaces préhilbertiens –
Enseignant : Xavier Friederich

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, où $x_1, \dots, x_n$ (respectivement $y_1, \dots, y_n$) désignent les n composantes du vecteur x (respectivement y).
2. Que peut-on dire si les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas tous strictement positifs ?

Exercice 2. Montrer que la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall\, (f, g) \in E^2, \qquad \varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. Calculer les produits scalaires $\varphi(\cos, \sin)$ et $\varphi(\mathrm{Id}, \exp)$.
3. Calculer les normes $\|\cos\|$, $\|\sin\|$ et $\|\exp\|$.
4. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien et soient $x, y, z \in E$. Montrer que

$$\|x - z\|^2 \leq 2\left(\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2\right).$$

Exercice 5. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

1. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.
2. Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 6. Soit E un espace préhilbertien de norme associée $\|\cdot\|$. Soit n un entier naturel non nul et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Montrer que $\left\|\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 \leq n \displaystyle\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\, n \geq 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad S_p^2 \leq S_{p-1}S_p$.

Exercice 10. Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u,v) \in E^2$ vérifiant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|u + tv\| \geq \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degrés inférieurs ou égaux à 3.

1. a. Montrer qu'en posant $(P|Q) := \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$, on définit un produit scalaire sur E.
   b. Déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
   c. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(X)$ dans E pour ce produit scalaire.
   d. Déterminer la projection orthogonale de $X^3 - X^2$ sur $\mathrm{Vect}(1, X)$ pour $(\cdot|\cdot)$.
2. Reprendre les questions précédentes avec $\langle P, Q\rangle := \displaystyle\sum_{k=-2}^{2} P(k)Q(k)$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère les sous-espaces vectoriels F et G donnés par les équations suivantes dans la base canonique

$$F : \begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x - 2y + 3z - 4t &= 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad G : \begin{cases} x + y &= 0 \\ z + t &= 0, \end{cases}$$

1. Déterminer une base de $F^\perp$. Orthonormaliser cette base par le processus de Gram-Schmidt.
2. Déterminer l'expression de la projection orthogonale de (x, y, z, t) sur $F^\perp$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur G.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^4$. Déterminer la distance de x au sous-espace vectoriel G.

Exercice 13. Soit E un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire noté $\langle , \rangle$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
3. Montrer que si on suppose de plus E euclidien, alors l'inclusion de la question précédente est une égalité.

Exercice 14. 1. Vérifier que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 15. Déterminer lorsque le couple (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$ la valeur minimale de l'intégrale

$$\int_0^\pi (t - a\cos t - b\sin t)^2 \ dt.$$

Exercice 16. Déterminer

$$\inf\left\{\int_{-1}^1 \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \ dt, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Exercice 17. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 18 (Polynômes de Laguerre)**.** On définit $\langle , \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall\, (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \qquad \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h_n(x) = x^n e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(n)}(x) = L_n(x)e^{-x}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(L_0, L_1, \ldots L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_n\| = n!$.

Exercice 19. 1. Vérifier que pour toute fonction continue f, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^1}}\, dt$ est convergente.

2. Déterminer la borne inférieure de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ lorsque P décrit l'ensemble des polynômes unitaires (coefficient dominant égal à 1) de degré 3.

Exercice 20. On considère un espace euclidien $(E, \langle , \rangle)$.

1. Montrer que pour tout endomorphisme u de E, il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que
$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$
On dira que u^* est l'adjoint de u.
2. Soit p un projecteur de E et soit p^* son adjoint. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(p + p^*) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p^*.$$

Exercice 21. Soit E un espace euclidien et soit p un projecteur de E. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. p est une projection orthogonale.
2. p est un endomorphisme symétrique (c'est-à-dire $\forall\ x, y \in E, \quad \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$).
3. $\forall\ x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des matrices orthogonales et triangulaires supérieures de taille n.

Exercice 23. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, \ldots, v_n$ les vecteurs colonnes de M (qui sont des éléments de $\mathbb{R}^n$), $v := \sum_{i=1}^n v_i$ et $u = \sum_{j=1}^n e_j$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit enfin $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j} = \langle u, v\rangle$.
2. En déduire que $\displaystyle\left|\sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}\right| \leq n$. Cette inégalité est-elle optimale ?
3. Démontrer que $\displaystyle n \leq \sum_{i,j=1}^{n} |m_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 24. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrer que $u\left(F^\perp\right) = u(F)^\perp$.
2. Démontrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Exercice 25. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\, dt$. On considère l'application $\phi : E \to E$ définie par
$$\phi(P)(X) = P(-X).$$
Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Exercice 26. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ et soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose pour tout $x \in E$

$$s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}a.$$

1. Montrer que s_a est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{Id})$.
3. Décrire géométriquement s_a.

Exercice 27. Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

Exercice 28. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle , \rangle$ défini par : $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

Montrer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ déterminé par

$$\varphi(P) := (X^2 - 1)P'' + 2XP' + P$$

est symétrique.

Exercice 29. On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable en base orthonormée.
2. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres pour A.

Exercice 30. On considère la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Justifier que B est diagonalisable et diagonaliser B en base orthonormée.

Exercice 31. Soit $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On ordonne les valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ (avec d'éventuelles répétitions).
Montrer que $\lambda_1 = \min\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ et $\lambda_n = \max\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$.

Exercice 32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On pose $B := A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en la matrice B.

Exercice 33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A +^t A$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 34. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

Exercice 35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont toutes positives.