UFR Mathématiques

Université de Strasbourg
Xavier Friederich

L2 S4 Automne - Analyse S4 - Intégration

Automne 2018

Feuille d'exercices

– Fin du Chapitre 1 : Intégrale de Riemann –

Exercice 1 —

1. Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$ mais non-identiquement nulle.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 2 —
Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} f^2$.

Exercice 3 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]} |f| = \left|\int_{[0,1]} f\right|$ si et seulement si f est de signe constant sur $[0,1]$.
Que peut-on dire de $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_{[0,1]} |f| = \left|\int_{[0,1]} f\right|$?

Exercice 4 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que la suite $\displaystyle\left(n\int_{[0,\frac{1}{n}]} f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 —
Soient $a \leq b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.
Démontrer l'inégalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_{[a,b]} f'^2$.

Exercice 6 —
Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle I(a) := \int_0^1 \min(x,a)dx$.

Exercice 7 —
Calculer à l'aide d'un changement de variables $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{Arctan}(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}dx$.

Exercice 8 —
Pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $\displaystyle I(a,n) = \int_0^1 x^a(1-x)^n dx$.

1. Trouver une relation entre $I(a+1,n)$ et $I(a,n)$.
2. Calculer $I(a,n) - I(a,n+1)$.
3. En déduire une expression de $I(a,n+1)$ en fonction de $I(a,n)$ puis donner une expression de $I(a,n)$.

Exercice 9 (Intégrales de Wallis.) —
On pose pour tout entier naturel n : $\displaystyle W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. Montrer que $\displaystyle W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
2. Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ puis en déduire une expression de W_{2p} et W_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Après avoir calculé nW_nW_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montré que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$, proposer un équivalent de W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 —
Montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin(\frac{k\pi}{n})$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \sqrt[n]{e^{-k}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(n+p)\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n^2+kn}{n^2+(n+k)^2}}{\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1-\frac{k}{n}}}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$.

Exercice 11 —
Soit f continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 (Intégrale de Poisson.) —
Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Montrer en utilisant les sommes de Riemann :

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)dx = \begin{cases} 2\pi \ln|a| & \text{si } |a| > 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Exercice 13 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}}$ est convergente et déterminer sa limite. (*<u>Indication</u> : on pourra commencer par montrer l'encadrement* $\displaystyle\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}} \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *en prenant le soin de noter pour quelles valeurs de p et n il est valable.*)

Exercice 14 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$, alors f a un point fixe.

Exercice 15 —
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue avec $a \leq b$ deux réels. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]} |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{[a,b]}|f|$.

Exercice 16 (Versions du lemme de Lebesgue) —

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b e^{inx}f(x)dx = 0$.
2. Montrer que le résultat précédent est encore vrai en supposant seulement f continue par morceaux sur $[a,b]$. (*<u>Indication</u> : on pourra commencer par montrer le résultat pour les fonctions en escalier puis on utilisera un argument de densité.*)

Exercice 17 —
On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin(t))^2}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction que l'on notera encore f.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.