---

**Feuille d'exercices 1**
– Chapitre 1 : Intégration de Riemann. –

---

*DEFINITION ET PROPRIETES DE l'INTEGRALE DE RIEMANN*

Exercice 1 —
Dire, en le justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux.
2. La fonction $\begin{array}{ccc} ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.
3. La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3} & \text{si } x \in ]0,1] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
4. La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
5. La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout segment.
6. Une fonction définie sur [0,1] est continue si et seulement si elle est uniformément continue.
7. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
8. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est stable par produit.
9. L'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est stable par prise de la valeur absolue.
10. Pour toutes fonctions en escalier $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[0,1]} fg = \int_{[0,1]} f \times \int_{[0,1]} g$.
11. Si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors $f$ est bornée.

Exercice 2 —
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 \lfloor x \rfloor \, dx$.

Exercice 3 —
Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x^2 \rfloor\right)$ est en escalier sur $[0,2]$ et calculer son intégrale.

Exercice 4 —
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, où $a < b$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice 5 (Première formule de la moyenne) —
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux à valeurs positives.

Prouver l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.

Exercice 6 (Deuxième formule de la moyenne) —
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux avec $f$ positive et décroissante.

Prouver l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ dt = f(a^+)\int_a^c g(t)\ dt$, où $f(a^+)$ désigne la limite à droite de $f$ en $a$. *(Indication : on pourra introduire la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\ dt$ et commencer par le cas où $f$ est supposée en escalier.)*

Exercice 7 —
Soient $a < b$ deux réels.

1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer que $f$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
2. Le résultat est-il encore vrai si l'on suppose seulement $f$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ?
3. Le résultat est-il encore vrai si l'on suppose seulement $f$ continue par morceaux ?

Exercice 8 —
Soient $a < b$ deux réels.

1. Soit $f$ continue sur $[a,b]$ à valeurs positives telle que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$. Montrer que $f$ est identiquement nulle sur $[a,b]$.
2. Le résultat est-il encore vrai si $f$ n'est pas supposée à valeurs positives ?

Exercice 9 —
Déterminer toutes les applications continues $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)^2\ dx$.

Exercice 10 —
Soit $I$ un segment.

1. Montrer que l'application $\|.\|_{\infty,I} : f \longmapsto \sup\limits_I |f|$ est une norme sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
2. Calculer $\|f\|_{\infty,[-1,1]}$ pour $f : x \longmapsto x^3 - x + 1$.
3. Calculer $\|f\|_{\infty,[-\pi,\pi]}$ pour $f : x \longmapsto \sin(x)e^{3ix}$.
4. A-t-on $\|fg\|_{\infty,I} = \|f\|_{\infty,I}\|g\|_{\infty,I}$ pour toutes fonctions continues $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ?
5. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} \|.\|_{1,I} : & \mathscr{C}(I,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_I |f| \end{array}$$
est une norme, où $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
6. Les normes $\|.\|_{\infty,I}$ et $\|.\|_{1,I}$ sont-elles équivalentes sur $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ ?
7. $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ?
8. L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_I |f|$ est-elle une norme sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$ ?

Exercice 11 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]} |f| = \left|\int_{[0,1]} f\right|$ si et seulement si $f$ est de signe constant sur $[0,1]$.

Que peut-on dire de $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_{[0,1]} |f| = \left|\int_{[0,1]} f\right|$ ?

Exercice 12 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = 0$.

Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt \leq -\min_{[0,1]} f \times \max_{[0,1]} f$.

EXERCICE 13 —
Soient $I = [0,1]$ et $f : I \longrightarrow I$ continue par morceaux. Etablir

$$\int_I f^2 \leq \int_I f \leq \sqrt{\int_I f^2}.$$

EXERCICE 14 —
Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux. Etablir

$$\int_{[a,b]} f \times \int_{[a,b]} \frac{1}{f} \geq (b-a)^2.$$

EXERCICE 15 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$, alors $f$ a un point fixe.

EXERCICE 16 —
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue avec $a \leq b$ deux réels. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{[a,b]} |f|$.

EXERCICE 17 —
Soit $F$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Déterminer $\displaystyle\inf_{f\in F} \int_{[0,1]} |f' - f|$.

*ORTHOGONALITE*

EXERCICE 18 (PROBLÈME DES MOMENTS) —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$. Montrer que $f$ possède au moins $n+1$ zéros sur $[0,1]$.
2. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$. Montrer que $f$ est identiquement nulle. *(Indication : on pourra utiliser le théorème de Weierstrass suivant d'approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions polynômiales.)*
   Théorème : Pour toute fonction continue $g$ sur $[0,1]$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} |g(t) - P_n(t)| = 0$.

EXERCICE 19 (MÉTHODE DE GAUSS) —
Soit $n \geq 1$ et soit $L_n$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme dérivé de $(X^2-1)^n$.

1. Montrer que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)L_n(x)\,dx = 0$.
2. Montrer que $L_n$ admet $n$ racines simples dans $]-1,1[$ que l'on notera $x_1, ..., x_n$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k)$.

EXERCICE 20 —
Soit $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. On suppose que pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{[0,1]} uv = 0$. Montrer que $u$ est identiquement nulle.
2. On suppose que pour tout $v \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\int_{[0,1]} v = 0$, $\displaystyle\int_{[0,1]} uv = 0$. Montrer que $u$ est constante.

*AUTOUR DES SOMMES DE RIEMANN*

EXERCICE 21 —
Montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin(\dfrac{k\pi}{n})$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \sqrt[n]{e^{-k}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{k^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \left( \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2) \right)^{\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} \left( \displaystyle\prod_{p=1}^{n} (n + p) \right)^{\frac{1}{n}}$
7. $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n^2+kn}{n^2+(n+k)^2}}{\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k}{n}}}$
8. $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}).$

Exercice 22 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{9n^2}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 23 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{k}{n^2+k^2}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 24 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}\sqrt{n+k+1}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 25 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\big(\dfrac{k}{n}\big) \sin\big(\dfrac{k}{n^2}\big)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 26 —
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2x^2}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 27 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\Big)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 28 —
Soit $f$ continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 29 (Intégrale de Poisson.) —
Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$. Montrer en utilisant les sommes de Riemann :

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)dx = \begin{cases} 2\pi \ln|a| & \text{si } |a| > 1 \\ 0 & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Exercice 30 (Inégalité de Jensen) —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (on rappelle que cela signifie que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in [0,1]$, $\quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ et pour tous $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, on a l'inégalité
$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i).$$
2. Donner une preuve s'appuyant sur les sommes de Riemann de l'inégalité suivante :
$$\varphi\Big(\int_0^1 f(x)\, dx\Big) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x)\, dx.$$
(*Indication* : On pourra admettre (ou bien le démontrer si on ne l'a jamais fait) que $\varphi$ est une fonction qui est en particulier continue).

Exercice 31 —
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}$ est convergente et déterminer sa limite. (*Indication : on pourra commencer par montrer l'encadrement* $\displaystyle\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}} \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *en prenant le soin de noter pour quelles valeurs de $p$ et $n$ il est valable.*)

Exercice 32 —
Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ où $a \leq b$ sont deux réels.

Montrer que la suite de terme général $u_n := n\Big(\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) - \int_a^b f(t)\; dt\Big)$ converge et déterminer sa limite.

Application : Trouver un développement asymptotique, à la précision $\frac{1}{n}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*THEOREME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE*

Exercice 33 —
Soient $a \leq b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

Démontrer l'inégalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{[a,b]} f'^2.$

Exercice 34 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que la suite $\left(n \displaystyle\int_{[0,\frac{1}{n}]} f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 35 —
Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I(a) := \displaystyle\int_0^1 \min(x,a) dx.$

Exercice 36 (Inégalité de Young) —
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Justifier que $f$ est bijective, de bijection réciproque $f^{-1}$ continue et strictement croissante.
2. Montrer que pour tout $a \geq 0$,
$$af(a) = \int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt.$$
3. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$,
$$ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt.$$

4. Que fournit l'inégalité précédente avec $f : t \longmapsto t^{p-1}$, $p > 1$ ?

Exercice 37 —
Soient $a < b$ deux réels. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$\sup_{[a,b]} f^2 \leq \Big(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\epsilon}\Big) \int_{[a,b]} f^2 + \epsilon \int_{[a,b]} f'^2.$$

Exercice 38 —
Soit $f$ continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de terme général $u_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 39 —
Soit $f : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur tout segment et soit $a \in ]0,1[$.
On pose, pour tout $x \in ]0,1[$, $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

1. Justifier que $F$ est bien définie sur $]0,1[$.
2. Montrer que si $f$ est continue en $c \in ]0,1[$, alors $F$ est dérivable en $c$ et $F'(c) = f(c)$.
3. Montrer que si $f$ est discontinue en $c \in ]0,1[$, alors $F$ admet quand même des dérivées à gauche et à droite en $c$ à préciser.
4. Conclure que $F$ est continue sur $]0,1[$ et dérivable aux points de continuité de $f$.
5. Exemple : Représenter $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (-1)^{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor)\ dt$ sur $[0,5]$.

*INTEGRATION PAR PARTIES*

Exercice 40 —
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer l'intégrale $I_n := \displaystyle\int_0^1 x^n e^{ax}\ dx$.

Exercice 41 —
Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 x \ln x\ dx, \qquad \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\ dx, \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\mathrm{Arcsin}(x)\ dx,$$
$$\int_{-1}^1 (x+2)e^{x-1}\ dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)e^{2x}\ dx, \qquad \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{sh}(x)\ dx.$$

Exercice 42 —
Pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $I(a,n) = \displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^n dx$.

1. Trouver une relation entre $I(a+1,n)$ et $I(a,n)$.
2. Calculer $I(a,n) - I(a,n+1)$.
3. En déduire une expression de $I(a,n+1)$ en fonction de $I(a,n)$ puis donner une expression de $I(a,n)$.

Exercice 43 (Intégrales de Wallis.) —
On pose pour tout entier naturel $n$ : $W_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
2. Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ puis en déduire une expression de $W_{2p}$ et $W_{2p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Après avoir calculé $nW_nW_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montré que $W_n \sim W_{n+1}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, proposer un équivalent de $W_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 44 (Formule de Taylor avec reste intégral) —
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.

1. Montrer que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\dfrac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \dfrac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$
2. Applications :
   - Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ e^x > \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.
   - Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exercice 45 (Lemme de Lebesgue) —
1. Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b e^{inx} f(x)dx = 0$.
2. Montrer que le résultat précédent est encore vrai en supposant seulement $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$. (<u>*Indication*</u> *: on pourra commencer par montrer le résultat pour les fonctions en escalier puis on utilisera un argument de densité.*)

Exercice 46 (Méthode des trapèzes) —
Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. Montrer que

$$\Big| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \Big| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Exercice 47 (Inégalité de Van der Corput) —
Soit $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $\varphi'$ est monotone et $m := \min_{[a,b]} \varphi' > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\Big| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(t)} dt \Big| \leq \frac{2}{m\lambda}.$$

Exercice 48 (Inégalité de Hardy) —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $\int_0^1 F^2(x)\, dx \leq 4 \int_0^1 f^2(x)\, dx$.

*CALCUL DE PRIMITIVES ET INTEGRALES*

Exercice 49 —
Calculer

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad \int \frac{x^4+1}{x^2+1}\, dx,$$
$$\int \frac{2}{3+e^x}\, dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{x \ln x},$$
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx, \qquad \int \mathrm{ch}(x)\cos(x)\, dx.$$

Exercice 50 —
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Trouver une relation de récurrence sur les $I_n := \int_0^x \dfrac{1}{(t^2+1)^n}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 51 —
Calculer

$$\int \frac{1}{x-i}\, dx, \qquad \int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\, dx, \qquad \int \frac{x}{2x^2-6x+4}\, dx,$$
$$\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^3}\, dx, \qquad \int \frac{1}{x^n-1}\, dx \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 52 —
Calculer à l'aide d'un changement de variables $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{Arctan}(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin(x)}dx$.

Exercice 53 —
Calculer

$$\int \cos^3(x)\sin^2(x)\,dx,\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^5(x)\cos^{11}(x)\,dx,\qquad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$$

$$\int \mathrm{ch}^3(x)\mathrm{sh}^4(x)\,dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{(1+\cos(x))(1+\sin(x))}\,dx,\qquad \int\frac{dx}{\sin(x)},$$

$$\int\frac{\cos^3(x)}{2+3\sin(x)}\,dx,\qquad \int\frac{dx}{-2+\cos(x)},\qquad \int\frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Exercice 54 —
Calculer

$$\int\frac{1}{1-\sqrt{x+2}}\,dx,\qquad \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},\qquad \int\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx,\qquad \int\frac{x}{x^2+x+1}\,dx.$$

*EXEMPLES DE FONCTIONS DEFINIES PAR UNE INTEGRALE*

Exercice 55 —
Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2+1}\frac{t}{e^t}\,dt$ et calculer $f'$.

Exercice 56 —
Etudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(t)}$ ainsi que son comportement aux bornes du domaine de définition.

Exercice 57 —
On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+(\sin(t))^2}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction que l'on notera encore $f$.
3. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 58 —
Déterminer l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.