UFR de Mathématique et Informatique

Université de Strasbourg
Xavier Friederich

L2 S4 Automne - Analyse S4 - Intégration

Automne 2018

Feuille d'exercices

– Chapitre 2 : Intégrales généralisées –

Exercice 1 —
Donner la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}dt$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x}$.
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}-1\right)dx$.

Exercice 2 —
Montrer que la fonction $t\longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

Exercice 3 —
Soient $a,b>0$. Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

Exercice 4 —
Montrer l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))dt$.

Exercice 5 —

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$?
2. La fonction $x\longmapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 6 —
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n := \displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^{2n+1}}dx$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n converge.
2. Montrer la relation de récurrence $I_n=\frac{-1}{2n(2n-1)}\left(I_{n-1}+\frac{1}{\pi^{2n-1}}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7 —

1. Calculer pour tout entier naturel n l'intégrale $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t)}dt$. (*__Indication__ : on pourra faire le lien entre I_n et I_{n+1}.*)
2. On pose, pour tout entier naturel n, $J_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}dt$. Montrer que (I_n-J_n) converge vers 0 et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 8 —
Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(t) = \frac{1}{t} - E\big(\frac{1}{t}\big)$ est intégrable et calculer son intégrale sur $]0,1]$.

Exercice 9 —
Soient $a < b$ deux réels et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ existe et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$.
Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(a+x) - f(b+x)\right) dx$.

Exercice 10 —
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $x \geq a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ existe.
2. Montrer que le résultat précédent est encore vrai en supposant seulement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ est convergente. (*Indication : on pourra considérer la fonction*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-at}dt \end{array}$$

et faire une intégration par parties.)

Exercice 11 —
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(\frac{1}{x}\big)$.

Exercice 12 —
1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et intégrable. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Le résultat précédent est-il vrai si l'on suppose seulement $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable ?

Exercice 13 —
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f admet des limites en $\pm\infty$ et les déterminer.

Exercice 14 —
Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que u est bornée si et seulement si pour toute fonction $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable, uv est intégrable.

Exercice 15 —
1. Soit $\epsilon > 0$ et soit $f : [-\epsilon, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose que f est dérivable en 0 et que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0)\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} - e^{-2y}}{y} dy$ puis celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

Exercice 16 (Inégalités de Young, Hölder et Minkowski.) —
Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux.

1. Montrer : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. En déduire que si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur I, alors fg est intégrable sur I et de plus

$$\int_I |fg| \leq \Big(\int_I |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_I |g|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

3. En déduire que si $|f|^p$ et $|g|^p$ sont intégrables sur I, alors $|f+g|^p$ est intégrable sur I et de plus

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 17 (Une inégalité due à Kolmogorov) —
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f^2 et f''^2 sont intégrables.

1. Montrer que f'^2 est intégrable.
2. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$.

Exercice 18 —

1. Montrer l'équivalent $\displaystyle\int_0^x \ln(\ln(1+t))dt \sim x\ln(x)$ au voisinage de 0.
2. Montrer l'équivalent $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19 —
Proposer un développement asymptotique à n termes lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction "logarithme intégral" $li : x \longmapsto \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Exercice 20 —
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est non-nulle. Pour $t > 0$, prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(nt)$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Application : trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 21 —
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]A,+\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$. On suppose que f' est intégrable sur $]A,+\infty[$.

1. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ est absolument convergente.
2. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Application. Soit $\alpha \in]0,1[$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$?