Université de Strasbourg,
Département de Mathématiques

Intégrales généralisées

Exercice 1 Etudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent.

$\int_0^1 \ln x \, dx$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad \int_0^{+\infty} \sin^2(x) dx$ $\quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ $\quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$ $\quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{(-\sqrt{x})} dx$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ $\quad \int_{-\infty}^0 xe^x \cos x dx$ $\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}$ $\quad \int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$

Exercice 2 Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ $\quad \int_{-1}^{+\infty} \cos(x^2) dx$ $\quad \int_\pi^{+\infty} x^2 \sin(x^4) dx$ $\quad \int_\pi^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x} dx$

Exercice 3 Pour quelles valeurs réelles de α et β réelles les intégrales suivantes convergent-elles ?

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x-1)^\beta}$ $\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ $\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-x}}{1+x^\beta} dx$ $\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$

Exercice 4 1°. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ est convergente et la calculer. .

Exercice 5 1°. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ est convergente.

2°. Pour $\epsilon > 0$, on pose $I_\epsilon = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$. Montrer que $I_\epsilon = \int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

3°. Déterminer $\lim\limits_{\epsilon \to 0_+} I_\epsilon$ et la valeur exacte de I.

Exercice 6 1°. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

2°. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$.

3°. Montre que pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

4°. En déduire la valeur de I.

Exercice 7 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1°. Déterminer l'ensemble D des valeurs de λ telles que l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ converge.

2°. Montrer que pour tout $\lambda \in D$, $I(\lambda) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8 Soient les fonctions

$$u : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \qquad v : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

1°. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

2°. En déduire que la fonction $u+v$ est constante sur sur $\mathbb{R}$.
3°. Calculer $(u+v)(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
4°. En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 9 Etudier la convergence de $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\sin t)\,dt}{t^\alpha}$ en fonction de α.

Exercice 10 Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.
1°. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(\frac{1}{x})}{1+x^2}dx$ sont convergentes.
2°. Montrer que ces deux intégrales sont convergentes.
3°. Soit $n\geq 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$.

Exercice 11 On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du$.
1°. Montrer que les intégrales I et J sont de même nature.
2°. En considérant $f(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du$ et en procédant à une intégration par parties, montrer que J converge.
3°. En déduire que I est convergente et que $I=J$.

Exercice 12 Etudier l'intégrabilité sur $]0,1]$ de la fonction : $x\mapsto\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

Exercice 13 Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$
On suppose que f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} n^4t+n-n^5 & \text{si } t\in[n-\frac{1}{n^3},n],\ n\geq 2\\ -n^4t+n+n^5 & \text{si } t\in[n,n+\frac{1}{n^3}],\ n\geq 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f est continue, non bornée et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 15 Soit une fonction f à valeurs réelles continue et intégrable sur $[1,+\infty[$, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx=0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f(x)|dx=1$.
Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que $\left|\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx\right|\leq\dfrac{1}{2}$.

Exercice 16 Pour $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$.
1°. Montrer que la fonction Γ est définie, sur $]0,+\infty[$.
2°. Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
3°. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire les valeurs de Γ sur $\mathbb{N}^*$.
4°. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.
En déduire une expression de $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.