UFR de Mathématique et Informatique — Université de Strasbourg
Xavier Friederich

L2 S4 - Analyse S4 - Intégration — *Automne 2018*

Feuille d'exercices

– Chapitre 3 : Séries de Fourier. –

Exercice 1 —
Expliciter la série de Fourier de f 2π-périodique donnée par $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x) = \dfrac{x}{2}$ et $f(\pi) = 0$ puis étudier la nature de cette série.

Exercice 2 —

1. Calculer la série de Fourier de f 2π-périodique donnée par $\forall x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = x^2$.
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3 —
Calculer pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ les intégrales $\displaystyle I_{a,n} := \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\operatorname{ch}(a) + \cos(t)} dt$.
(*Indication* : on procédera par une méthode "indirecte" de calcul.)

Exercice 4 —

1. Déterminer la série de Fourier de f 2π-périodique définie par $\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ f(t) = 1$ et $\forall t \in \left[-\pi, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \pi\right],\ f(t) = 0$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 5 —
Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de :

1. f impaire, 2π-périodique telle que $\forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = 1$.
2. f paire, 2π-périodique telle que $\forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = \pi - x$.

Exercice 6 —
Montrer que $\displaystyle\forall t \in]0,\pi[,\ \cos(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nt)$.

Exercice 7 (Exemples de développements eulériens.) —

1. Pour $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, déterminer la série de Fourier de f 2π-périodique telle que $\forall t \in [-\pi,\pi],\ f(t) = \cos(at)$.
2. En déduire :
   – $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$
   – $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$.

Exercice 8 —
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique (avec $T > 0$), continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et d'intégrale nulle sur $[0,T]$, montrer que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 9 —
Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; on note $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier complexes. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N},\ c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{|n|^p}\Big)$.

Exercice 10 (Coefficients de Fourier d'un produit) —
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques.

1. Donner une preuve de : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(fg) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)c_{n-k}(g)$.

Exercice 11 —
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = 0$.
Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 12 —
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \longmapsto e^{\alpha e^{ix}}$ est-elle développable en série de Fourier ? Quelle est sa série de Fourier ?
2. Montrer que l'on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\alpha\cos(x)}dx = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$.

Exercice 13 —
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ paire et 2π-périodique telle que $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$.
2. En déduire que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (Formule sommatoire de Poisson) —
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\exists M \geq 0, \exists \alpha > 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$.
De plus, définissant l'application

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt, \end{array}$$

on suppose que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|$ converge.

1. Vérifier que l'application $\hat{f}$ est bien définie.
2. Montrer que
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) \end{array}$$
est bien définie, continue et 2π-périodique.
3. Calculer alors les coefficients de Fourier complexes de ϕ.
4. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)$.

Exercice 15 (Théorème de Bernstein sur les séries de Fourier.) —
On se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ k-lipschitzienne et 2π-périodique. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.

1. Montrer que l'on a, pour tout $h > 0$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2dx = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2|c_n|^2$.

2. En déduire la majoration : $\forall h > 0, \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2 |c_n|^2 \leq k^2 h^2$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer la majoration $\displaystyle\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} \leq \frac{k^2\pi^2}{2^{2p+1}}$.

   (*Indication* : on pourra prendre une valeur de h bien choisie dans l'inégalité de la question précédente).

4. En déduire la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ et énoncer le résultat obtenu quant à la série de Fourier d'une fonction lipschitzienne $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ périodique.

Exercice 16 —
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Soit $(b_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier "impairs".

1. On note g la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in]0, 2\pi[,\ g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et $g(0) = 0$. Déterminer la série de Fourier de g.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{b_n(f)}{n}$ converge et que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t)dt$.

3. La série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln(n+1)}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Est-elle la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux 2π-périodique (on pourra répondre de deux façons différentes) ? Est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?