Exercices d'Intégration – Séries numériques feuille 3

Licence de Mathématiques

2$^{\text{ème}}$ année, semestre 3

Exercice 1. On considère les séries numériques suivantes :

$$A := \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n\,(n+1)} \;,\; B := \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;,\; C := \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{2^n}$$

Pour chacune de ces séries :

1. Calculer les sommes partielles S_k pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. La série converge-t-elle ?
3. En cas de convergence, calculer la somme de la série.

Exercice 2. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série convergente. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 3. On appelle *série de Riemann* une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
Indication : on pourra essayer de comparer $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Exercice 4. Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \frac{2^n}{2n+5^n} \;,\; v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \;, \qquad w_n = \frac{n!}{n^n} \;,$$
$$a_n = \ln(1+\frac{1}{n^2}) \;,$$

$$d_n = \frac{n^2}{n^2+1} \;,\; e_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \;,\; f_n = \sin\frac{n^3+1}{n^5+2};\; g_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} ,$$
$$h_n = \frac{2^n}{n!} \;,\; k_n = \frac{n^n}{n!} \;,\; m_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}{(2n)^n} \;,\; p_n = \frac{1+\ln n}{n^2} \;,\; q_n = e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 5. Étudier en fonction du paramètre réel α la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n}$.

Exercice 6. Soit la série de terme général u_n défini pour $n \geq 3$ par : $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \geq 3,\ \int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{dt} \leq u_n.$$
2. Calculer, pour $A > 0$: $\displaystyle\int_3^A \frac{1}{t\ln t}, dt$
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 7. On appelle *série de Bertrand* une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ et $n > 1$.

1. Étudier la nature de la série si $\beta = 0$.
2. Vérifier que si $\alpha < 0$ alors la série diverge.
3. Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, alors la série diverge.
4. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge.
5. On étudie maintenant le cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que pour $\beta < 0$ la série diverge.
   (b) On suppose maintenant $\beta \geq 0$. En encadrant la série, montrer qu'elle converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 8. Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs, et désignons par S_k sa somme partielle d'ordre k.

1. Vérifier que pour tout $k \geq 1$ on a $S_k > 0$.
2. On suppose que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et on note $S := \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ converge, que $S > 0$ et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{S}.$$
3. On suppose que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{u_1}.$$

4. Déduire des questions précédentes la somme des séries
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\quad\text{et}\quad\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}\,.$$

Exercice 9. On considère la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ est une série alternée convergente.
2. Cette série est-elle absolument convergente ?

Exercice 10. Étudier la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

$$a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2^n}\ ,\ b_n=\sin\left(\left(\frac{1}{n}+n\right)\pi\right)\ ,\ c_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\ ,\ d_n=\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$$
$$e_n=\frac{\cos n}{n}\ ,\ f_n=\frac{\cos n}{n^2}\ ,\ g_n=\frac{\cos^2 n}{n}\ ,\ h_n=\cos(na)\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\ \text{avec } a\in\mathbb{R}.$$

Exercice 11.

1. Montrer que la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, on pose $S_n(t):=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}$.
   (a) Montrer que $\int_0^1 S_n(t)\ \mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, on a $S_n(t)=\frac{1-(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}}{1+t^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\int_0^1\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\leq\frac{1}{2n+3}$.
   (d) Calculer $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.
3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose
$$a_n:=\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étude de (a_n).
   (a) Quel est le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Établir une relation entre a_n et a_{n+2}. En déduire la limite de (a_n).
   (d) Montrer l'inégalité, pour $n>1$,
   $$\frac{1}{n+1}\leq 2a_n\leq\frac{1}{n-1}$$
   et donner un équivalent à (a_n).
2. Étude de $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$.
   (a) Montrer que la série est semi-convergente.
   (b) Montrer que, pour tout entier n,
   $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan t}\mathrm{d}t-(-1)^{n+1}\int_0^{\pi/4}\frac{(\tan t)^{n+1}}{1+\tan t}\mathrm{d}t\,.$$
   (c) En déduire l'égalité
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan t}\mathrm{d}t\,.$$
   (d) Calculer l'intégrale ci-dessus.

Exercice 13. Soit $(a_n)_n$ une suite monotone et bornée et $\sum_{n\geq 0}b_n$ une série convergente. Montrer que $\sum_{n\geq 0}a_nb_n$ est convergente.

Exercice 14. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+v_n$ avec $\sum_{n\geq 0}v_n$ absolument convergente.

1. Montrer qu'il existe $k>0$ tel que $u_n\sim\frac{k}{n^\alpha}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ en fonction de α.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et par $\forall\ n\in\mathbb{N}\ :\ u_{n+1}:=u_n+e^{-u_n}$. Montrer que $u_n=\ln n+\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 16. Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ continue, positive et décroissante.

1. Montrer que pour tout $k\geq 1$, on a
$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\ \mathrm{d}t\leq f(k).$$
2. On note $u_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(t)\ \mathrm{d}t$. Montrer que la série (u_n) converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell\in[0,f(1)]$.

3. Applications :
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in [0,1]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in [1,2]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - \alpha + o(1)$.

Exercice 17. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[A,+\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$. On suppose que f' est intégrable sur $[A,+\infty[$.

1. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)$ est absolument convergente.
   Indication : on pourra intégrer par parties $\displaystyle\int_{n-1}^{n} (t-n+1)f'(t)\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
   Applications.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$?
4. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 18. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et est non-nulle.

1. Pour $t > 0$, prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(nt)$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$.
   Application
2. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ lorsque x tend vers 1.