

Mémoire de première année de magistère de Mathématiques

Xavier Friederich

Septembre 2015

REPRESENTATION DES GROUPES COMPACTS

Sous la direction de Pierre Baumann

Sommaire

Introduction	4
1 Produit tensoriel	5
1.1 Définition, existence et unicité	5
1.2 Propriétés du produit tensoriel	6
1.3 Le cas d'un anneau quelconque	8
1.4 Retour aux espaces vectoriels.	9
2 Groupes compacts, généralités	10
2.1 Définitions et exemples	10
2.2 Mesure de Haar sur un groupe compact	10
2.2.1 Action naturelle de groupes compacts	11
2.2.2 Existence d'une mesure de Haar	11
2.2.3 Unicité de la mesure de Haar	15
3 Représentations linéaires des groupes compacts	17
3.1 Généralités.	17
3.2 Représentation produit	18
3.3 Représentations linéaires en dimension finie	18
3.4 Décomposition d'une représentation hilbertienne unitaire	19
4 Caractère d'une représentation de dimension finie	22
4.1 Définition et propriétés	22
4.2 Lemme de Schur et application	22
4.3 Conséquence : relations d'orthogonalité des caractères.	23
4.4 Coefficients matriciels et bases hilbertiennes	25
4.5 Complément sur les groupes compacts	28
4.6 Le cas des groupes abéliens compacts	28
5 Représentations induites en dimension finie	29
5.1 Algèbre d'un groupe	29
5.2 Définitions	29
5.2.1 Restriction d'une représentation	29
5.2.2 Représentation induite	30
5.3 Propriétés de l'induction	30
5.4 Caractère d'une représentation induite et formule de réciprocity	31
6 Représentations du groupe symétrique	33
6.1 L'anneau des fonctions symétriques	33
6.1.1 Notion de partition	33
6.1.2 Anneau des polynômes symétriques à n indéterminées	33
6.1.3 Fonctions symétriques élémentaires	33
6.1.4 Fonctions symétriques complètes	35
6.1.5 Fonctions de Schur	37
6.1.6 Formules de Pieri	38
6.1.7 Correspondance de Robinson-Schensted-Knuth et applications	41
6.1.8 Les sommes de Newton	45
6.1.9 Construction de l'anneau des fonctions symétriques	48
6.1.10 Produit scalaire sur l'anneau des fonctions symétriques Λ	49
6.2 Détermination des caractères du groupe symétrique	50
6.2.1 L'anneau des caractères	50
6.2.2 L'application caractéristique de Frobenius	51
6.2.3 Formule des caractères de Frobenius	53
6.2.4 Application de la formule de Frobenius	54
6.2.5 Complément sur les valeurs des caractères irréductibles	55
6.3 Les modules de Specht, représentations du groupe symétrique	55

7	Détermination des caractères du groupe unitaire	62
7.1	Généralités sur les groupes de Lie	62
7.1.1	Notion de variété différentielle	62
7.1.2	Algèbre de Lie	63
7.1.3	L'application exponentielle	64
7.1.4	Espace tangent et champs de vecteurs invariants à gauche	64
7.1.5	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	67
7.2	Le groupe unitaire	67
7.2.1	Propriétés générales	68
7.2.2	Tore du groupe unitaire	68
7.2.3	La formule d'intégration de Weyl	71
7.2.4	Les caractères du tore	75
7.2.5	Les caractères irréductibles du groupe unitaire	77
	Conclusion - Remerciements	80
	Références	81

Introduction

Le présent mémoire se veut une introduction à la théorie des représentations des groupes topologiques compacts.

Dans le premier chapitre, on introduit la notion algébrique de produit tensoriel qu'on sera amené à manipuler à plusieurs reprises dans la suite.

Ensuite, on en vient à la théorie des représentations. Si la théorie des représentations est valable pour tout groupe fini, on s'intéresse plus généralement dans ce mémoire aux groupes compacts ; en outre, les notions de topologie générale seront souvent utiles.

Le résultat essentiel, rendant possible la théorie, est sans doute l'existence d'une mesure sur chaque groupe compact qui a en plus la propriété d'invariance par translation ; cette mesure permet par exemple d'intégrer des fonctions continues sur un groupe compact, donc aussi de définir des produits scalaires. La preuve de ce résultat fondamental, rédigée dans la deuxième section, repose sur des notions d'analyse fonctionnelle.

On en vient alors au vocabulaire des représentations et à la notion de caractère. On verra, en exploitant certains outils d'analyse hilbertienne ainsi que la théorie de Schur, Peter et Weyl, qu'on sera amené en pratique à déterminer les caractères des représentations irréductibles des groupes compacts.

Le cinquième chapitre est une approche de la théorie des représentations induites, nécessaire à la construction de nouvelles représentations à partir de représentations données.

Dans les deux derniers chapitres, on est amené à manipuler les outils introduits sur des cas concrets. D'abord, on cherche à déterminer les caractères irréductibles du groupe symétrique. Pour cela, on étudie l'anneau des polynômes symétriques, différentes familles de fonctions symétriques qui constituent des bases de cet anneau, et on établit un certain nombre de relations entre les différentes bases. On a besoin en outre d'éléments d'algèbre combinatoire, à savoir les tableaux de Young.

On récupère alors les caractères irréductibles du groupe symétrique à partir des polynômes de Schur et de l'application caractéristique de Frobenius.

On conclut le chapitre sur le groupe symétrique par une représentation en modules de Specht.

Enfin, l'étude des fonctions de Schur faite pour le groupe symétrique sert également à exprimer les caractères irréductibles du groupe unitaire qui est un groupe de Lie, ce avec quoi se clôture ce mémoire. On introduit néanmoins des notations et concepts généraux concernant le thème très riche des groupes et algèbres de Lie. La détermination concrète des caractères irréductibles passe principalement par la restriction à l'ensemble des éléments diagonaux du groupe unitaire et utilise l'importante formule d'intégration de Weyl.

Dans tout l'exposé, on se place, sauf mention explicite du contraire, sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes muni de sa topologie transcendante.

1 Produit tensoriel

Dans un premier paragraphe, on définit le produit tensoriel de deux espaces vectoriels sur un corps. Dans le paragraphe suivant, on verra que l'on peut parler aussi plus généralement de produit tensoriel de modules sur un anneau.

1.1 Définition, existence et unicité

Définition Soit \mathbb{K} un corps et soient V et W des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Un produit tensoriel de V et W est la donnée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel T et d'une application bilinéaire $t : V \times W \rightarrow T$ satisfaisant la propriété universelle suivante :

pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel E et toute application bilinéaire $b : V \times W \rightarrow E$, il existe une unique application linéaire $\hat{b} : T \rightarrow E$ telle que $b = \hat{b} \circ t$. Cela se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & E \\ \downarrow t & \nearrow \hat{b} & \\ T & & \end{array}$$

Remarque : Un tel couple (T, t) est unique à unique isomorphisme près au sens du théorème suivant.

THÉORÈME 1.1 —

Si V et W sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, il existe un produit tensoriel (T, t) de V et W , unique au sens suivant : si (T, t) et (T', t') sont des produits tensoriels de V et W , il existe un unique isomorphisme $\phi : T \rightarrow T'$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & V \times W & \\ t \swarrow & & \searrow t' \\ T & \xrightarrow{\phi} & T' \end{array}$$

On parle ainsi du produit tensoriel de V et W , noté $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Les éléments de cet espace vectoriel sont appelés les tenseurs. L'application bilinéaire $t : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} W$ est notée $(v, w) \mapsto v \otimes w$. Un élément de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ s'écrivant $v \otimes w$ s'appelle tenseur décomposable. Les tenseurs décomposables engendrent $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

Démonstration — unicité :

Supposons (T, t) et (T', t') sont des produits tensoriels de V et W . Appliquons la propriété universelle pour T au couple (T', t') .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t'} & T' \\ \downarrow t & \nearrow \exists! \phi & \\ T & & \end{array}$$

Donc $\exists! \phi : T \rightarrow T', t' = \phi \circ t$.

Montrons que ϕ est bijective. On applique la propriété universelle pour T' au couple (T, t) .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t} & T \\ \downarrow t' & \nearrow \exists! \psi & \\ T' & & \end{array}$$

Donc $\exists! \psi : T' \rightarrow T, t = \psi \circ t'$.

Ainsi, $t = (\psi \circ \phi) \circ t$. En appliquant une dernière fois la propriété universelle pour T au couple (T, t) ,

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{t} & T \\ \downarrow t & \nearrow \exists! u & \\ T & & \end{array}$$

on trouve $\exists! u : T \rightarrow T, t = u \circ t$.

Comme Id_T et $\psi \circ \phi$ vérifient la même propriété que u , on a donc $\psi \circ \phi = u = Id_T$. De même, on aurait $\phi \circ \psi = Id_{T'}$ ce qui montre que ϕ est une bijection.

– existence :

Notons $[V \times W]$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les couples $(v, w) \in V \times W$. Alors $x \in [V \times W]$ s'écrit $x =$

$$\sum_{(v,w) \in V \times W} \lambda_{v,w}(v, w) \text{ avec les } \lambda_{v,w} \text{ presque tous nuls.}$$

L'injection canonique i de $V \times W$ dans $[V \times W]$ n'est pas bilinéaire, mais en composant par la projection sur un certain quotient, on va obtenir une application bilinéaire.

Notons F le sous-espace vectoriel de $[V \times W]$ engendré par les expressions suivantes : $\left\{ \begin{array}{l} (\lambda v + \lambda' v', w) - \lambda(v, w) - \lambda'(v', w) \\ (v, \lambda w + \lambda' w') - \lambda(v, w) - \lambda'(v, w') \end{array} \right.$

On pose alors $T := [V \times W]/F$, on note π_F la projection de $[V \times W]$ sur F et on définit :

$$\begin{array}{ccc} t : & V \times W & \rightarrow & T \\ & (v, w) & \mapsto & \pi_F \circ i(v, w) = \overline{(v, w)} \end{array}$$

Comme F est engendré par des expressions qui égales à 0 caractérisent la bilinéarité, il est immédiat de constater que t est bilinéaire. De plus, puisque $[V \times W]$ est engendré par les (v, w) , T est engendré par les $t((v, w))$.

Il reste à montrer que T est bien un produit tensoriel de V et W , c'est-à-dire que la propriété universelle est vérifiée.

On se donne pour cela E un \mathbb{K} -espace vectoriel et b une application bilinéaire de $V \times W$ dans E .

Soit :

$$\begin{array}{ccc} f : & [V \times W] & \rightarrow & E \\ & (v, w) & \mapsto & b(v, w) \end{array}$$

Comme b est bilinéaire, $f|_F = 0$, donc f passe au quotient pour donner : $\hat{b} : T \rightarrow E$ linéaire. Comme $\hat{b}(\overline{(v, w)}) = f(v, w) = b(v, w)$, on obtient déjà $b = \hat{b} \circ t$. Puisque T est engendré par les $t((v, w))$ et que les images des $t((v, w))$ sont déterminés uniquement (ce sont les $b(v, w)$), il en résulte que l'application \hat{b} obtenue est unique. \square

Remarque : On définit aussi le produit tensoriel de modules sur un anneau commutatif A . La construction est la même que sur un corps ; on parle simplement d'applications A -linéaires et A -bilinéaires. Plus généralement, on définit un produit tensoriel $M \otimes_A N$ de modules sur un anneau quelconque A . Là encore, la construction est la même, mais M doit être un A -module à droite et N un A -module à gauche. En outre, une difficulté supplémentaire s'ajoute : les applications ne sont plus que \mathbb{Z} -bilinéaires et \mathbb{Z} -linéaires car, lorsque A n'est pas commutatif, les axiomes de A -bilinéarité ne sont plus forcément satisfaits.

Dans le paragraphe suivant, on se restreindra à des anneaux commutatifs. On évoquera le cas général plus tard.

1.2 Propriétés du produit tensoriel

On suppose dans tout ce paragraphe que A est un anneau commutatif unitaire (on note 1 l'élément unité). Si M et N sont deux A -modules, on note $Hom_A(M, N)$ l'ensemble des applications A -linéaires de M dans N (on dit aussi morphismes de A -modules) et $Bil_A(M, N)$ l'ensemble des applications A -bilinéaires de M vers N . On vérifie que ces ensembles sont munis d'une structure de A -module grâce à la commutativité de A .

Proposition 1 Soient M, M_1 et M_2 trois A -modules.

Il existe un isomorphisme A -linéaire du A -module $Bil_A(M_1 \times M_2, M)$ sur le A -module $Hom_A(M_1 \otimes_A M_2, M)$.

Comme le A -module $Bil_A(M_1 \times M_2, M)$ est naturellement isomorphe à $Hom_A(M_1, Hom_A(M_2, M))$, on a aussi l'isomorphisme de A -modules suivant :

$$Hom_A(M_1 \otimes_A M_2, M) \simeq Hom_A(M_1, Hom_A(M_2, M)).$$

Démonstration On suppose que le A -module $M_1 \otimes_A M_2$ est associé à l'application A -bilinéaire $t : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_A M_2, (m_1, m_2) \mapsto m_1 \otimes m_2$.

Si $b : M_1 \times M_2 \rightarrow M$ est A -bilinéaire, alors, d'après la propriété universelle, il existe une unique application $\hat{b} : M_1 \otimes_A M_2 \rightarrow M$ A -linéaire telle que $b = \hat{b} \circ t$.

On a donc une application

$$\begin{array}{ccc} \hat{\cdot} : & Bil_A(M_1 \times M_2, M) & \rightarrow & Hom_A(M_1 \otimes_A M_2, M) \\ & b & \mapsto & \hat{b} \end{array}$$

bien définie.

On montre que cette application est A -linéaire.

Si $b, b' \in Bil_A(M_1 \times M_2, M)$, alors on voit immédiatement que $\forall (m_1, m_2) \in M_1 \times M_2, (\hat{b} + \hat{b}') \circ t(m_1, m_2) = (b + b')(m_1, m_2)$.

La proposition universelle donne alors par unicité : $\widehat{b + b'} = \hat{b} + \hat{b}'$.

De la même manière, on montre que si $\alpha \in A$ et $b \in Bil_A(M_1 \times M_2, M)$, on a $\widehat{\alpha b} = \alpha \hat{b}$.

Ensuite, si $\hat{b} = \hat{b}'$, alors en composant à droite par t , on montre que $b = b'$. Cela prouve que $\hat{\cdot}$ est injective.

Enfin, si $f \in Hom_A(M_1 \otimes_A M_2, M)$, l'application $b : M_1 \times M_2 \rightarrow M$ qui au couple (m_1, m_2) associe $f(t(m_1, m_2))$ est A -bilinéaire et vérifie par définition $b = f \circ t$. La proposition universelle donne alors que $f = \hat{b}$. Cela prouve que $\hat{\cdot}$ est surjective.

D'où le résultat. \square

Proposition 2 Soient M_1, M_2, N_1, N_2 des A -modules.

Si $f : M_1 \rightarrow M_2$ et $g : N_1 \rightarrow N_2$ sont A -linéaires, il existe une unique application A -linéaire $M_1 \otimes_A N_1 \rightarrow M_2 \otimes_A N_2$ notée $f \otimes g$ telle que

$$\forall (m, n) \in M_1 \times N_1, (f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

Démonstration On suppose que t_1 (respectivement t_2) est l'application A -bilinéaire associée à $M_1 \otimes_A N_1$ (respectivement à $M_2 \otimes_A N_2$). Le diagramme comutatif suivant expose clairement la situation.

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times N_1 & \xrightarrow{(f,g)} & M_2 \times N_2 \\ t_1 \downarrow & & \downarrow t_2 \\ M_1 \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\exists! f \otimes g} & M_2 \otimes_A N_2 \end{array}$$

On compose l'application

$$(f, g) : \begin{array}{ccc} M_1 \times N_1 & \rightarrow & M_2 \times N_2 \\ (m, n) & \mapsto & (f(m), g(n)) \end{array} \quad (A\text{-bilinéaire})$$

par l'application

$$t_2 : \begin{array}{ccc} M_2 \times N_2 & \rightarrow & M_2 \otimes_A N_2 \\ (x, y) & \mapsto & x \otimes y \end{array} \quad (A\text{-bilinéaire})$$

de sorte que $t_2 \circ (f, g)$ soit une application A -bilinéaire.

Alors la propriété universelle du produit tensoriel fournit l'existence et l'unicité de l'application A -linéaire $\widehat{t_2 \circ (f, g)} : M_1 \otimes_A N_1 \rightarrow M_2 \otimes_A N_2$ telle que $t_2 \circ (f, g) = \widehat{t_2 \circ (f, g)} \circ t_1$.

On pose alors $f \otimes g := \widehat{t_2 \circ (f, g)}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(m \otimes n) &= (f \otimes g) \circ t_1(m, n) \\ &= t_2 \circ (f, g)(m, n) \\ &= t_2(f(m), g(n)) \\ &= f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

Proposition 3 Soient M, N, L des A -modules. On a les isomorphismes de A -modules suivants :

1. $A \otimes_A M \simeq M$.
2. $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.
3. $(M \oplus N) \otimes_A L \simeq (M \otimes_A L) \oplus (N \otimes_A L)$.
4. $M \otimes_A (N \otimes_A L) \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A L$.

Démonstration 1. Puisque M est muni d'une structure de A -module, on a une application $b : A \times M \rightarrow M, (a, m) \mapsto am$ qui est A -bilinéaire.

Par la propriété universelle, cette application induit

$$\hat{b} : \begin{array}{ccc} A \otimes_A M & \rightarrow & M \\ a \otimes m & \mapsto & am \end{array}$$

qui est A -linéaire. (Evidemment, il suffit de définir \hat{b} sur les tenseurs décomposables puisque ces derniers engendrent $A \otimes_A M$.)

En définissant l'application A -linéaire

$$\phi : \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & A \otimes_A M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \end{array},$$

on voit que $\hat{b} \circ \phi = Id_M$ et :

$$\begin{aligned} \phi \circ \hat{b}(a \otimes m) &= \phi(am) \\ &= 1 \otimes (am) \\ &= t(1, am) \\ &= t(a.1, m) \quad (\text{linéarité à gauche de } t) \\ &= a \otimes m. \end{aligned}$$

Donc $\phi \circ \hat{b} = Id_{A \otimes_A M}$ car $A \otimes_A M$ est engendré par les tenseurs décomposables.

Finalement \hat{b} est inversible (d'inverse ϕ) : c'est donc un isomorphisme.

2. L'application A -bilinéaire

$$\begin{aligned} M \times N &\rightarrow N \otimes_A M \\ (m, n) &\mapsto n \otimes m \end{aligned}$$

induit (toujours par application de la propriété universelle) l'application A -linéaire

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\rightarrow N \otimes_A M \\ m \otimes n &\mapsto n \otimes m \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de M et N , on a aussi une application A -linéaire $N \otimes_A M \rightarrow M \otimes_A N$ qui définit clairement l'inverse de la première.

3. On considère cette fois l'application A -bilinéaire

$$\begin{aligned} (M \oplus N) \times L &\rightarrow (M \otimes_A L) \oplus (N \otimes_A L) \\ (m + n, l) &\mapsto m \otimes l + n \otimes l \end{aligned}$$

Cette application induit une application A -linéaire

$$\begin{aligned} \phi : (M \oplus N) \otimes L &\rightarrow (M \otimes_A L) \oplus (N \otimes_A L) \\ (m + n) \otimes l &\mapsto m \otimes l + n \otimes l \end{aligned}$$

D'autre part, les injections canoniques $i_M : M \hookrightarrow M \oplus N$ et $i_N : N \hookrightarrow M \oplus N$ induisent d'après la proposition précédente les applications A -linéaires $i_M \otimes Id_L : M \otimes L \rightarrow (M \oplus N) \otimes L$ et $i_N \otimes Id_L : N \otimes L \rightarrow (M \oplus N) \otimes L$. Cela permet de définir l'application A -linéaire "somme directe" de $i_M \otimes Id_L$ et $i_N \otimes Id_L$ par :

$$\begin{aligned} \psi : (M \otimes_A L) \oplus (N \otimes_A L) &\rightarrow (M \oplus N) \otimes L \\ (m \otimes l + n \otimes l) &\mapsto (i_M(m) + i_N(n)) \otimes l. \end{aligned}$$

Il est ensuite aisé de voir que ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

4. A $l \in L$ fixé et avec des notations évidentes, l'application $(m, n) \rightarrow m \otimes (n \otimes l)$ est A -bilinéaire, donc induit une application A -linéaire ϕ_l telle que $\forall (m, n) \in M \times N, \phi_l(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes l)$.

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \phi : (M \otimes_A N) \times L &\rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L) \\ (m \otimes n, l) &\mapsto \phi_l(m \otimes n) \end{aligned}$$

est A -bilinéaire, donc induit une application A -linéaire

$$\begin{aligned} \psi : (M \otimes_A N) \otimes_A L &\rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L) \\ (m \otimes n) \otimes l &\mapsto m \otimes (n \otimes l) \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient l'application A -linéaire

$$\begin{aligned} \xi : M \otimes_A (N \otimes_A L) &\rightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A L \\ m \otimes (n \otimes l) &\mapsto (m \otimes n) \otimes l \end{aligned}$$

Il est alors clair que ξ et ψ sont inverses l'une de l'autre. □

1.3 Le cas d'un anneau quelconque

On se donne ici un anneau A que l'on ne suppose pas nécessairement commutatif. Soit M un A -module à droite et N un A -module à gauche.

M et N ont évidemment une structure de groupe abélien, donc de \mathbb{Z} -module. Puisque \mathbb{Z} est un anneau commutatif, on peut former d'après le premier paragraphe adapté aux anneaux commutatifs le produit tensoriel de \mathbb{Z} -modules $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

On définit alors le produit tensoriel de M et N au-dessus de A par :

$$M \otimes_A N := M \otimes_{\mathbb{Z}} N / \langle ma \otimes n - m \otimes an \rangle.$$

Définition Une application $f : M \times N \rightarrow L$ avec M un A -module à droite, N un A -module à gauche et L un \mathbb{Z} -module est dite équilibrée si elle est \mathbb{Z} -bilinéaire et si pour tout $(a, m, n) \in A \times M \times N, f(ma, n) = f(m, an)$.

Avec cette définition et les notations précédentes, on peut maintenant énoncer la propriété universelle vérifiée par le produit tensoriel $M \otimes_A N$, muni d'une application \mathbb{Z} -bilinéaire $t : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$:

Proposition 4 (Propriété universelle) Pour tout couple (L, f) formé d'un \mathbb{Z} -module et d'une application équilibrée $f : M \times N \rightarrow L$, il existe un unique morphisme de \mathbb{Z} -modules $\hat{f} : M \otimes_A N \rightarrow L$ tel que $f = \hat{f} \circ t$.

On peut alors appliquer cette propriété universelle pour démontrer les propriétés du paragraphe précédent. Simplement, la proposition 3.(2) n'est plus valable et la proposition 3.(4) devient plus subtile.

1.4 Retour aux espaces vectoriels.

Dans ce dernier paragraphe concernant les produits tensoriels, on s'intéresse plus particulièrement au produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimension finie; on va établir des relations qui serviront lorsqu'on parlera de représentation produit.

Proposition 5 Si V et W désignent deux espaces vectoriels de dimension finie, si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(w_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont des bases de V et W respectivement, alors $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une base de $V \otimes W$.
En particulier, $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

Démonstration La démonstration utilise la propriété 3.(3). □

On se donne à présent V_1, V_2, W_1, W_2 quatre espaces vectoriels de bases respectives $(v_{1,j})_{1 \leq j \leq p}, (v_{2,i})_{1 \leq i \leq n}, (w_{1,l})_{1 \leq l \leq q}, (w_{2,k})_{1 \leq k \leq m}$ et deux applications linéaires $f : V_1 \rightarrow V_2$ et $g : W_1 \rightarrow W_2$.

On note $A := [a_{ij}]$ la matrice de f dans les bases $(v_{1,j})_{1 \leq j \leq p}, (v_{2,i})_{1 \leq i \leq n}$ et $B := [b_{kl}]$ la matrice de g dans les bases

$(w_{1,l})_{1 \leq l \leq q}, (w_{2,k})_{1 \leq k \leq m}$, de telle sorte que : $f(v_{1,j}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_{2,i}$ et $g(w_{1,l}) = \sum_{k=1}^m b_{kl} w_{2,k}$.

Donc

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(v_{1,j} \otimes w_{1,l}) &= f(v_{1,j}) \otimes g(w_{1,l}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ij} b_{kl} v_{2,i} \otimes w_{2,k}. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de l'application linéaire $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \rightarrow V_2 \otimes W_2$ dans les bases $(v_{1,j} \otimes w_{1,l})$ et $(v_{2,i} \otimes w_{2,k})$ est $A \otimes B := [a_{ij} b_{kl}]$ où $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$ et $(j, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$.

Par exemple, si V_1, V_2, W_1, W_2 sont quatre espaces vectoriels de dimension 2 et si on choisit sur $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ l'ordre $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$, la matrice $A \otimes B$ est égale à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

A partir de là, il n'est plus difficile de démontrer les assertions de la proposition suivante :

Proposition 6 Si A et B sont deux matrices carrées de tailles n et m , on a les formules :

1. $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.
2. $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$.

2 Groupes compacts, généralités

2.1 Définitions et exemples

Définition Un groupe topologique (G, \bullet) est un groupe muni d'une topologie séparée telle que les applications $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x \bullet y$ et $G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ soient continues. Un tel groupe est dit compact si sa topologie est celle d'un espace compact, c'est-à-dire si de tout recouvrement ouvert de G on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Remarque : Un morphisme de groupes topologiques est continu.

Définition Soit \mathbb{K} un corps topologique (c'est-à-dire muni d'une topologie compatible avec les opérations internes et le passage à l'inverse). Un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique $(V, +, \cdot)$ est un espace vectoriel muni d'une topologie pour laquelle l'addition et la multiplication externe sont continues.

Exemples de groupes compacts :

- Tout groupe fini muni de sa topologie discrète est compact.
- Tout sous-groupe fermé d'un groupe compact est compact.
- Les sous-groupes $SO_n(\mathbb{R}) := \{M \in GL_n^+(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\} \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ et $U(n) := \{M \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M}M = I_n\} \subset GL_n(\mathbb{C})$, munis de la topologie induite de la topologie usuelle sur $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ respectivement.
- Tout produit de groupes compacts est un groupe compact (c'est une conséquence du théorème de Tychonov).
- Toute limite projective de groupes compacts est compacte ; c'est le cas notamment du groupe des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Exemples de groupes non-compacts :

- $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$, muni de la topologie induite de la topologie associée à la norme infinie sur $M_n(\mathbb{C})$ par exemple. C'est une partie clairement non-fermée en prenant la suite des $\text{Diag}(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- Le groupe spécial orthogonal à coefficients complexes $SO_2(\mathbb{C}) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tMM = I_2 \text{ et } \det M = 1\}$, muni de la topologie induite de la topologie usuelle sur $M_2(\mathbb{C})$ (associée à la norme sup par exemple).

En effet, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{C})$, il vient immédiatement :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & (1) \\ b^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ad - bc = 1 & (3) \\ ab + cd = 0 & (4). \end{cases}$$

On déduit de (4) que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{C}, b = -\lambda c$ et $d = \lambda a$.

Ces dernières expressions, injectées dans (3) montrent que $\lambda a^2 + \lambda c^2 = 1$. Il résulte donc de l'égalité (1) que $\lambda = 1$. Ainsi, M s'écrit $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + c^2 = 1$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}, \exists c_k \in \mathbb{C}, c_k^2 = 1 - k^2$. La suite de matrices $M_k = \begin{pmatrix} k & -c_k \\ c_k & k \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{C})$ montre alors que $SO_2(\mathbb{C})$ est non-borné, donc *a fortiori* non-compact.

2.2 Mesure de Haar sur un groupe compact

On fixe G un groupe topologique compact. On note $\mathcal{C}(G)$ l'espace vectoriel des applications continues sur G à valeurs dans \mathbb{C} et on note $\mathcal{C}^+(G)$ le sous-espace des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

On dira qu'une forme \mathbb{C} -linéaire $\Lambda : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ est positive si $\forall f \in \mathcal{C}^+(G), \Lambda(f) \geq 0$. Une telle forme linéaire est appelée mesure de Radon positive.

On démontre l'existence et l'unicité d'une mesure positive μ_G sur la tribu borélienne de G telle que :

- $\forall f \in \mathcal{C}(G), \forall s \in G, \int_G f(t)\mu_G(dt) = \int_G f(ts)\mu_G(dt)$
- μ_G est de masse totale 1.

On aura alors aussi :

$$\forall f \in \mathcal{C}(G), \forall s \in G, \int_G f(t)\mu_G(dt) = \int_G f(st)\mu_G(dt).$$

μ_G est appelée mesure de Haar ou mesure invariante de G .

2.2.1 Action naturelle de groupes compacts

L'application suivante

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{C}(G) &\rightarrow \mathcal{C}(G) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f = (h \mapsto f(hg)) \end{aligned}$$

définit clairement une action à gauche du groupe G sur $\mathcal{C}(G)$ qui induit une action duale sur $\mathcal{C}(G)^\vee := \mathcal{L}(\mathcal{C}(G), \mathbb{C})$ via l'application

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{C}(G)^\vee &\rightarrow \mathcal{C}(G)^\vee \\ (g, \Lambda) &\mapsto g \cdot \Lambda = (f \mapsto \Lambda(g^{-1} \cdot f)) \end{aligned}$$

On a de manière symétrique les actions à droite correspondantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(G) \times G &\rightarrow \mathcal{C}(G) \\ (f, g) &\mapsto f \cdot g = (h \mapsto f(hg)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(G)^\vee \times G &\rightarrow \mathcal{C}(G)^\vee \\ (\Lambda, g) &\mapsto \Lambda \cdot g = (f \mapsto \Lambda(f \cdot g^{-1})) \end{aligned}$$

2.2.2 Existence d'une mesure de Haar

On expose dans un premier temps deux théorèmes d'analyse fonctionnelle adaptés à notre étude et qui vont servir à montrer l'existence d'une mesure de Haar sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(G)$ de G . Nous admettrons toutefois ces théorèmes.

Le théorème suivant caractérise les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}(G)$.

THÉORÈME 2.1 (DE REPRÉSENTATION DE RIESZ-MARKOV) —

Pour toute forme linéaire positive $\Lambda : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}$, il existe une mesure positive $\mu_G : \mathcal{B}(G) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ finie telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(G), \Lambda(f) = \int_G f d\mu_G.$$

En outre, il existe une unique mesure positive vérifiant l'égalité précédente qui est régulière, c'est-à-dire :

- $\forall E \in \mathcal{B}(G), \mu_G(E) = \inf \{ \mu_G(U) \mid E \subset U, U \text{ ouvert de } G \}$
- $\forall E \in \mathcal{B}(G), \mu_G(E) = \sup \{ \mu_G(K) \mid K \subset E, K \text{ compact de } G \}$.

Le second théorème est un théorème de point fixe.

THÉORÈME 2.2 (DE KAKUTANI) —

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On munit¹ $\mathcal{L}(E)$ de la norme $\|\cdot\|'$ définie par $\|f\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|f(x)\|\}$.

Soient K un compact convexe non vide et $\phi : G \rightarrow GL(E)$ un morphisme de groupes tel que :

1. $\forall g \in G, \phi(g)(K) \subset K$
2. $\phi(G) \subset \mathcal{C}(E, E)$ est équicontinue.

Alors $\exists k \in K, \forall g \in G, g \cdot k = k$.

Enfin, avant d'énoncer le théorème d'existence d'une mesure de Radon invariante par translation, on donne la démonstration du théorème de Heine suivant concernant les groupes topologiques.

THÉORÈME 2.3 —

Soit G un groupe compact et f une fonction continue sur G . Alors f est uniformément continue² sur G au sens suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de e_G tel que pour tous x, y de G tels que $xy^{-1} \in U$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Démonstration On fixe $\epsilon > 0$.

Comme f est continue sur G ,

$$\forall y \in G, \exists W_y \in \mathcal{V}(e_G), \forall x \in G, xy^{-1} \in W_y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

1. de manière à définir un espace topologique

2. Il est nécessaire de définir la notion d'uniforme continuité ici, car G n'est pas supposé métrique

La continuité de la loi du groupe G (car topologique) donne un voisinage V_y de e_G tel que $V_y \cdot V_y \subset W_y$. Par définition des voisinages, $\forall y \in G, \exists U_y$ ouvert de G tel que $e_G \in U_y \subset V_y$.

Comme $G \subset \bigcup_{y \in G} U_y \cdot y$ et G compact,

$$\exists y_1, \dots, y_n \in G, G \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \cdot y_i.$$

Notons $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Il est clair que U est un voisinage de e_G .

Soient $x, y \in G$ tels que $xy^{-1} \in U$.

Comme $y \in G, \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y \in U_{y_i} \cdot y_i \subset V_{y_i} \cdot y_i$. Ainsi, $y \cdot y_i^{-1} \in V_{y_i} \subset V_{y_i} \cdot V_{y_i} \subset W_{y_i}$. On a donc déjà :

$$|f(y) - f(y_i)| \leq \epsilon.$$

De plus, $xy_i^{-1} = (xy^{-1}) \cdot (yy_i^{-1}) \in U \cdot V_{y_i} \subset V_{y_i} \cdot V_{y_i} \subset W_{y_i}$; il vient donc

$$|f(x) - f(y_i)| \leq \epsilon.$$

En somme,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(y)| \leq 2\epsilon.$$

L'uniforme continuité de f est donc démontrée. □

THÉORÈME 2.4 —

Il existe une forme linéaire positive Λ sur $\mathcal{C}(G)$ telle que $\forall g \in G, g \cdot \Lambda = \Lambda$ et $\Lambda \cdot g = \Lambda$.

Démonstration La démonstration du théorème précédent se fait en trois étapes :

1. Construire une valeur $\Lambda(f)$ pour $f \in \mathcal{C}(G)$

On note $E := \mathcal{C}(G)$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{g \in G} |f(g)|$, ce qui a un sens puisqu'il s'agit de fonctions continues sur un compact. En outre, E est aussi l'ensemble des fonctions continues et bornées sur G ; comme $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est de Banach, un théorème classique de complétude montre que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est aussi de Banach.

Fixons $f \in \mathcal{C}(G)$. On désigne par C_f l'enveloppe convexe de $G \cdot f = \{h \mapsto f(hg) | g \in G\}$ et par K_f l'adhérence de C_f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Par construction, K_f est un convexe non vide de E . Montrons qu'il s'agit aussi d'un compact.

Comme G est compact et f continue, le théorème de Heine donné plus haut montre que f est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \mathcal{V} \text{ voisinage de } e_G, \forall g, g' \in G, g'^{-1}g \in \mathcal{V} \Rightarrow |f(g) - f(g')| \leq \epsilon.$$

Or, pour tout $h \in G, (hg')^{-1}(hg) = g'^{-1}g$, donc pour tous $g, g' \in G$ tels que $g'^{-1}g \in \mathcal{V}$, on a $|f(hg) - f(hg')| \leq \epsilon$. Cela étant valable pour tout h , on obtient que pour tous $g, g' \in G$ tels que $g'^{-1}g \in \mathcal{V}$, $\|g \cdot f - g' \cdot f\|_\infty \leq \epsilon$.

En particulier, l'application

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathcal{C}(G) \\ g &\mapsto g \cdot f \end{aligned}$$

est continue. Puisque G est compact et $\mathcal{C}(G)$ est séparé (car c'est un espace métrique pour la distance provenant de $\|\cdot\|_\infty$), il vient ainsi $G \cdot f$ est compact.

Or, dans un Banach, l'enveloppe convexe d'un compact est relativement compacte. Ainsi $K_f = \overline{\text{Conv}(G \cdot f)}$ est compact, ce que l'on voulait.

On considère maintenant le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \phi : G &\rightarrow GL(E) \\ g &\mapsto (f \mapsto g \cdot f) \end{aligned}$$

Fixons $g \in G$. Il est clair que $\phi_g(C_f) \subset C_f$. Donc $C_f \subset \phi_g^{-1}(C_f) \subset \phi_g^{-1}(K_f)$.

De plus, K_f est fermé et ϕ_g continue, donc $\phi_g^{-1}(K_f)$ est un fermé.

Donc par définition de l'adhérence de C_f comme étant le plus petit fermé contenant C_f , on a $K_f \subset \phi_g^{-1}(K_f)$ puis finalement $\phi_g(K_f) \subset K_f$.

On veut voir à présent que $\phi(G) \subset \mathcal{C}(E, E)$ est équicontinue. Fixons donc $\epsilon > 0$ et $f_0 \in E$.

Pour $\Phi \in \phi(G), \exists g \in G,$

$$\begin{aligned} \Phi : E &\rightarrow E \\ f &\mapsto (h \mapsto f(hg)) \end{aligned}$$

Il est donc immédiat que $\|\Phi\| = \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\Phi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1$.

Ainsi, en prenant $\Phi \in \phi(G)$ et une fonction $f \in E$ telle que $\|f - f_0\|_\infty \leq \epsilon$, on a :

$$\|\Phi(f) - \Phi(f_0)\|_\infty = \|\Phi(f - f_0)\|_\infty \leq \|\Phi\| \cdot \|f - f_0\|_\infty \leq \epsilon.$$

Cela garantit l'équicontinuité en f_0 de la famille $\phi(G)$, donc l'équicontinuité sur tout E .

Les hypothèses du théorème de Kakutani donné plus haut sont satisfaites, donc : $\exists \omega \in K_f, \forall g \in G, g \cdot \omega = \omega$. En particulier, il est immédiat que ω est constante sur G . On note $\Lambda(f)$ la valeur de ω sur G et on notera par abus $\omega = \Lambda(f)$.

2. Vérifier que l'on définit ainsi une application Λ

On montre ici que $\Lambda(f)$ est unique de manière à définir une application

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \Lambda(f) \end{array}$$

On suppose en fait qu'il existe une autre fonction constante de valeur $k \in \mathbb{C}$ et on montre que $\Lambda(f) = k$. Soit $\epsilon > 0$.

On définit la fonction suivante qui va jouer un rôle essentiel.

$$f^\vee : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & f(g^{-1}) \end{array}$$

On montre dans un premier temps que si $\Lambda(f^\vee) \in K_{f^\vee}$ est constante, on a $\Lambda(f) = \Lambda(f^\vee)$. Par propriétés de K_f

et K_{f^\vee} , $\exists n \in \mathbb{N}, \exists g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n \in G, \exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ et $\left\| \Lambda(f) - \sum_{i=1}^n a_i g_i \cdot f \right\|_\infty \leq \epsilon, \left\| \Lambda(f^\vee) - \sum_{j=1}^n b_j h_j \cdot f^\vee \right\|_\infty \leq \epsilon$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en multipliant la deuxième inégalité par a_i et en évaluant la fonction en g_i^{-1} , on a :

$$|a_i \Lambda(f^\vee) - \sum_{j=1}^n a_i b_j f^\vee(g_i^{-1} h_j)| \leq a_i \left\| \Lambda(f^\vee) - \sum_{j=1}^n b_j h_j \cdot f^\vee \right\|_\infty \leq a_i \epsilon$$

D'où en sommant pour i variant de 1 à n :

$$|\Lambda(f^\vee) - \sum_{i,j=1}^n a_i b_j f(h_j^{-1} g_i)| \leq \epsilon$$

En effectuant le même type d'opérations, on obtient de même :

$$|\Lambda(f) - \sum_{i,j=1}^n a_i b_j f(h_j^{-1} g_i)| \leq \epsilon$$

D'où en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient : $\forall \epsilon > 0, |\Lambda(f^\vee) - \Lambda(f)| \leq 2\epsilon$, donc $\Lambda(f^\vee) = \Lambda(f)$.

De la même manière que pour $\Lambda(f)$, quitte à prendre n plus grand et des a_i nuls, on peut trouver des $c_l \geq 0$, des g'_l

avec $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\sum_{l=1}^n c_l = 1$ et $\left\| k - \sum_{l=1}^n c_l g'_l \cdot f \right\|_\infty \leq \epsilon$.

En évaluant en les h_j^{-1} puis en sommant sur j , on obtient en particulier :

$$|k - \sum_{j,l=1}^n b_j c_l f(h_j^{-1} g'_l)| \leq \epsilon,$$

soit encore :

$$|k - \sum_{j,l=1}^n b_j c_l f^\vee(g'_l^{-1} h_j)| \leq \epsilon$$

et de même, on obtient en évaluant en les g'_l^{-1} et en sommant sur l :

$$|\Lambda(f^\vee) - \sum_{j,l=1}^n b_j c_l f^\vee(g'_l^{-1} h_j)| \leq \epsilon$$

On a ainsi $|\Lambda(f) - k| = |\Lambda(f^\vee) - k| \leq 2\epsilon$, d'où l'unicité de $\Lambda(f)$.

3. Montrer les propriétés de Λ

On vérifie à présent que l'application Λ est \mathbb{C} -linéaire, positive et invariante par translation.

– \mathbb{C} -linéarité.

Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{C}$.

Pour montrer $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$, on raisonne de la même manière que dans l'étape précédente de la démonstration.

Prenons $\epsilon > 0$. $\exists a_1, \dots, a_n \in G, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $\|\Lambda(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \cdot f\|_\infty \leq \epsilon$ (*).

On définit alors $h := \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \cdot g$. Alors $h \in K_g$, donc $K_h \subset K_g$. Puisque chacun de ces ensembles contient une fonction constante unique, on a $\Lambda(h) = \Lambda(g)$. Donc il existe des $b_j \in G$ et des $\beta_j > 0, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (quitte à redéfinir n) avec $\sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ tels que $\|\Lambda(g) - \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \cdot h\|_\infty \leq \epsilon$. Cela donne :

$$\|\Lambda(g) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j b_j a_i \cdot g\|_\infty \leq \epsilon.$$

L'inégalité (*) donne : $\forall x \in G, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\Lambda(f) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x b_j a_i)| \leq \epsilon$. En multipliant cette inégalité par β_j puis en sommant sur j , il vient donc :

$$\forall x \in G, |\Lambda(f) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j f(x b_j a_i)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in G, |\Lambda(f) + \Lambda(g) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \beta_j (f + g)(x b_j a_i)| \leq 2\epsilon.$$

Cela implique donc, puisque $\sum_{i, j} \alpha_i \beta_j = 1$, que $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$.

Montrons $\Lambda(\lambda f) = \lambda \Lambda(f)$.

On remarque que $K_{\lambda f} = \overline{\text{Conv}\{g \cdot (\lambda f) | g \in G\}} = \lambda \overline{\text{Conv}\{g \cdot f | g \in G\}} = \lambda K_f$.

$\Lambda(\lambda f)$ est l'unique application constante de $K_{\lambda f}$ tandis que $\lambda \Lambda(f)$ est l'unique application constante de λK_f . Puisque les ensembles $K_{\lambda f}$ et λK_f sont égaux, les applications constantes sont les mêmes.

– positivité de Λ

Si $f \in \mathcal{C}^+(G), K_f = \overline{\text{Conv}\{h \mapsto f(hg) | g \in G\}}$, il est donc clair que toute fonction de K_f est à valeurs positives ; en particulier c'est le cas de $\Lambda(f)$.

– invariance par translation à gauche

Soit $g \in G$. Il faut montrer $g \cdot \Lambda = \Lambda$, c'est-à-dire $\forall f \in E, \Lambda(g^{-1} \cdot f) = \Lambda(f)$. On se donne donc un tel f . Or,

$$\begin{aligned} K_{g^{-1} \cdot f} &= \overline{\text{Conv}\{h \cdot (g^{-1} \cdot f) | h \in G\}} \\ &= \overline{\text{Conv}\{(hg^{-1}) \cdot f | h \in G\}} && \text{puisque } \cdot \text{ est une action du groupe } G \\ &= \overline{\text{Conv}\{h \cdot f | h \in G\}} && \text{puisque } h \mapsto hg^{-1} \text{ est une bijection de } G \text{ sur lui-même} \\ &= K_f \end{aligned}$$

Par unicité de l'application constante, le résultat en découle.

– invariance par translation à droite

On déduit de l'invariance par translation à gauche (c'est-à-dire $\forall f \in \mathcal{C}(G), \forall g \in G, \Lambda(h \mapsto f(hg^{-1})) = \Lambda(f)$) et de l'égalité $\forall f \in \mathcal{C}(G), \Lambda(f) = \Lambda(f^\vee)$ l'invariance de Λ par translation à droite.

En effet, en fixant $g \in G$,

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot g(f) &= \Lambda(h \mapsto f(g^{-1}h)) \\ &= \Lambda(h \mapsto \phi(h)) && \text{où } \phi : h \mapsto f(g^{-1}h) \\ &= \Lambda(h \mapsto \phi^\vee(h)) \\ &= \Lambda(h \mapsto \phi(h^{-1})) \\ &= \Lambda(h \mapsto f(g^{-1}h^{-1})) \\ &= \Lambda(h \mapsto f^\vee(hg)) \\ &= \Lambda(f^\vee) && \text{puisque } g^{-1} \cdot \Lambda(f^\vee) = \Lambda(f^\vee) \\ &= \Lambda(f) \end{aligned}$$

Conséquence : D'après le théorème de Riesz-Markov, on peut associer à Λ du théorème précédent la mesure borélienne régulière $\mu_G : \mathcal{B}(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\forall f \in \mathcal{C}(G), \Lambda(f) = \int_G f d\mu_G$.

La mesure μ_G est normalisée (c'est-à-dire $\mu_G(G) = 1$) puisque $\Lambda(\mathbf{1}) = 1$ où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante valant 1 sur G . En effet, $K_{\mathbf{1}} = \{\mathbf{1}\}$.

L'égalité $\forall g \in G, g^{-1} \cdot \Lambda = \Lambda$ implique immédiatement $\int_G f(hg)\mu_G(dh) = \int_G f(h)\mu_G(dh)$. On dit que μ_G est invariante par translation à droite.

De même, l'égalité $\forall g \in G, \Lambda \cdot g^{-1} = \Lambda$ implique immédiatement $\int_G f(gh)\mu_G(dh) = \int_G f(h)\mu_G(dh)$. On dit que μ_G est invariante par translation à gauche.

Remarque essentielle : La mesure μ_G est en fait unique ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2.2.3 Unicité de la mesure de Haar

THÉORÈME 2.5 —

Il existe une unique forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(G)$ invariante par translation.

Démonstration On a déjà démontré l'existence d'une mesure de Radon positive sur $\mathcal{C}(G)$ à laquelle on a associé une mesure de Haar μ_G .

Supposons qu'il existe une autre forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(G)$ invariante par translation. Le théorème de Riesz-Markov donne donc l'existence d'une mesure de probabilité ν_G , borélienne, régulière et invariante par translation. Alors :

$$\begin{aligned} \int_G f d\nu_G &= \int_G \mu_G(dy) \int_G f(x)\nu_G(dx) && \text{(mesure de probabilité)} \\ &= \int_G \mu_G(dy) \int_G f(yx)\nu_G(dx) && \text{(invariance par translation)} \\ &= \int_G \int_G f(yx)\mu_G(dy)\nu_G(dx) \\ &= \int_G \nu_G(dx) \int_G f(yx)\mu_G(dy) \\ &= \int_G f d\mu_G. \end{aligned}$$

Montrons que cette égalité (valable pour tout f) implique $\mu_G = \nu_G$. La démonstration que l'on donne est en fait celle que l'on ferait pour prouver l'unicité dans le théorème de Riesz-Markov.

Par propriété de régularité des mesures μ_G et ν_G , il suffit de montrer que pour tout fermé (donc compact car G compact) $K \subset G, \mu_G(K) = \nu_G(K)$.

Soient K compact dans G et $\epsilon > 0$. Il existe un ouvert Ω tel que $K \subset \Omega$ et $\nu_G(\Omega) \leq \nu_G(K) + \epsilon$. Puisque G est compact et $\Omega^c \cap K = \emptyset$, d'après la propriété d'Urysohn, il existe une fonction f continue sur G telle que $f|_K = 1$ et $f|_{\Omega^c} = 0$. Alors

$$\mu_G(K) = \int_G 1_K d\mu_G \leq \int_G f d\mu_G = \int_G f d\nu_G \leq \int_G 1_\Omega d\nu_G = \nu_G(\Omega) \leq \nu_G(K) + \epsilon.$$

Donc il résulte $\mu_G(K) \leq \nu_G(K)$; par symétrie, on a l'inégalité opposée. Donc $\mu_G = \nu_G$ puis le résultat. \square

Conséquence : On a donc une seule mesure de Haar positive μ_G sur la tribu $\mathcal{B}(G)$, normalisée, régulière et invariante par translation.

Voici maintenant un exemple d'utilisation de l'unicité de la mesure de Haar et de ses propriétés d'invariance par translation. Le résultat nous sera utile plus tard.

Proposition 7 *Soit G un groupe compact. On note μ_G la mesure de Haar associée à G . Pour toute application f de G à valeurs dans \mathbb{C} ,*

$$\int_G f(g)d\mu_G = \int_G f(g^{-1})d\mu_G.$$

Démonstration Soit l'application

$$\begin{aligned} L^\vee : \mathcal{C}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_G f(g^{-1})\mu_G(dg). \end{aligned}$$

L^\vee est clairement une mesure de Radon positive sur $\mathcal{C}(G)$.

On montre que cette forme linéaire est aussi invariante par translation, c'est-à-dire $\forall a \in G, a \cdot L^\vee = L^\vee$. Or, cela provient du fait que pour $\phi \in \mathcal{C}(G)$,

$$\begin{aligned} a \cdot L^\vee(\phi) &= \int_G \phi(g^{-1}a^{-1})\mu_G(dg) \\ &= \int_G \phi^\vee(ag)\mu_G(dg) \\ &= \int_G \phi^\vee(g)\mu_G(dg) && \text{on utilise ici l'invariance de } \mu_G \text{ par translation à droite} \\ &= \int_G \phi(g^{-1})\mu_G(dg) \\ &= L^\vee(\phi). \end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Radon positive sur $\mathcal{C}(G)$ montre que : $\forall f \in \mathcal{C}(G), L^\vee(f) = \int_G f d\mu_G$.

Cela achève la démonstration de la propriété énoncée. □

Exemple facile de mesure de Haar : Si G est un groupe fini, la mesure de Haar est simplement la mesure de comptage. Si E est une partie de G , $\mu_G(E) = \frac{|E|}{|G|}$.

Autre exemple : Prenons $G = U(1) = (\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, \times)$. Il s'agit d'un groupe compact dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Le morphisme de groupes topologiques surjectif $(\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (U(1), |\cdot|), \theta \mapsto e^{i\theta}$ a pour noyau $2\pi\mathbb{Z}$; le théorème de factorisation donne donc un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur G . La mesure de Haar sur G peut donc être donnée via la relation " $d\mu_G = \frac{d\theta}{2\pi}$ ".

L'intérêt de la mesure de Haar réside essentiellement dans le fait qu'elle permet de moyennner des objets sur des groupes G pour obtenir des objets G -invariants (voir paragraphe 3.1 pour la définition).

3 Représentations linéaires des groupes compacts

Sauf mention explicite du contraire, G désignera toujours un groupe topologique compact.

3.1 Généralités.

Définition Une représentation linéaire de G dans un \mathbb{C} -espace vectoriel topologique V est un homomorphisme ρ du groupe G dans le groupe $\text{GL}(V)$ des automorphismes de V tel que l'application

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \rho(g)(v) \end{aligned}$$

soit continue.

Remarques :

- On parle souvent de représentation linéaire continue de G dans V .
- On dit que V est un espace de représentation de G (ou encore par abus de langage une représentation de G)
- On note indifféremment ρ , V ou encore (ρ, V) une telle représentation.
- Dans la suite, on notera aussi bien $\rho(g)$ que ρ_g pour désigner l'image de g par ρ .

Définition Si V est de dimension finie n , on dit que n est le degré de la représentation linéaire.

Définition On dit que (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations linéaires de G semblables ou isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi : V \rightarrow V'$ tel que $\forall g \in G, \phi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \phi$.

Définition On dit qu'un sous-espace vectoriel W de V est stable par les opérations de G (ou stable par G ou encore G -invariant) si pour tout $x \in W$ et pour tout $g \in G, \rho_g(x) \in W$.

Définition On dit que (ρ, W) est une sous-représentation de (ρ, V) si W est un sous-espace de V et stable par G .

Définition Une représentation (ρ, V) de G est dite irréductible (ou simple) si V est non réduit à 0 et si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par G sont $\{0\}$ et V .

Une représentation irréductible de degré 1 est appelé caractère linéaire.

Dans la suite, on notera par \widehat{G} l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de G au sens de la définition de deux représentations isomorphes. Dans la suite, on confondra souvent classes et représentants par souci de simplification d'écriture.

Dans toute la suite, en ce qui concerne les formes sesquilineaires, on supposera la linéarité à gauche et la semi-linéarité à droite.

Définition On dit qu'une représentation linéaire continue ρ de G dans V est unitaire si la topologie de V dérive d'un produit scalaire hermitien $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

1. (V, \langle, \rangle) est un espace de Hilbert (c'est-à-dire préhilbertien complet)
2. \langle, \rangle est G -invariant, c'est-à-dire $\forall g \in G, \forall v, v' \in V, \langle \rho_g(v), \rho_g(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$.

Il faut noter que si G est fini, toute représentation linéaire de G dans un espace vectoriel de dimension finie V est unitaire. D'abord, puisque le corps de base est \mathbb{C} , on peut choisir un produit scalaire hermitien sur V que l'on note $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

La forme sesquilineaire hermitienne \langle, \rangle_G définie par $\forall x, y \in V, \langle x, y \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle$ est un produit sca-

laire sur V grâce à la positivité de \langle, \rangle . En outre, ce produit scalaire est G -invariant car pour $g \in G$ fixé, l'application $G \rightarrow G, h \mapsto hg$ est bijective. Le point (2) de la définition ci-dessus est donc vérifié.

En munissant V du produit scalaire hermitien \langle, \rangle_G , on obtient un espace préhilbertien. On déduit de ce produit scalaire une norme sur V ; comme V est de dimension finie, il est alors complet pour cette norme. Par suite, le point (1) de la définition est également vérifié.

Le théorème suivant montre que l'on peut étendre cela aux groupes compacts grâce à la mesure de Haar.

THÉORÈME 3.1 —

Soit G un groupe compact et ρ une représentation linéaire continue de G sur un espace de Hilbert (V, \langle, \rangle) . Alors il existe un produit scalaire hermitien G -invariant définissant la même topologie sur V que \langle, \rangle .

Démonstration On introduit

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_G : V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \int_G \langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle \mu_G(dg). \end{aligned}$$

On vérifie grâce aux propriétés du produit scalaire d'origine et à la propriété d'invariance par translation de la mesure de Haar que l'on définit ainsi une forme sesquilinéaire hermitienne positive G -invariante sur V . De plus, l'application

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \rho_g(v) \end{aligned}$$

est continue et G est compact, donc $\forall v \in V, \{\rho_g(v) | g \in G\}$ est un compact de V , donc en particulier borné. Comme V est un espace de Banach car de Hilbert, le théorème de Banach-Steinhaus donne que

$$M := \sup_{g \in G} \|\rho(g)\| < +\infty.$$

Donc $\forall g \in G, \forall v \in V, \|\rho_g(v)\| \leq M\|v\|$ et $\|v\| = \|\rho_{g^{-1}} \circ \rho_g(v)\| \leq M\|\rho_g(v)\|$, d'où :

$$M^{-1}\|v\| \leq \|\rho_g(v)\| \leq M\|v\|.$$

Ainsi, il résulte en utilisant $\mu_G(G) = 1$ et la positivité de μ_G

$$M^{-2}\|v\|^2 \leq \|v\|_G^2 \leq M^2\|v\|^2.$$

Cela montre que la forme hermitienne est définie et définit la même topologie sur V que le produit scalaire d'origine. D'où le résultat. \square

On supposera donc toujours dans la suite que les espaces de Hilbert V sont munis d'un produit scalaire hermitien invariant par G .

Proposition 8 Soit ρ une représentation linéaire continue unitaire de G dans un espace de Hilbert (V, \langle, \rangle) . Soit W un sous-espace vectoriel fermé de V stable par G . Alors $V^\perp = \{x \in V | \forall w \in W, \langle x, w \rangle = 0\}$ est un supplémentaire de W fermé dans V et stable par G .

Démonstration Comme V est de Hilbert et W est fermé, on a bien $V = W \oplus W^\perp$ et W^\perp fermé (c'est une conséquence du théorème de projection sur les convexes fermés dans les espaces de Hilbert).

Comme on suppose \langle, \rangle invariant grâce au théorème 3.1, on a évidemment W^\perp stable par G . \square

Remarque : On dit que la représentation V est somme directe des représentations W et W^\perp .

3.2 Représentation produit

On se donne ici G_1 et G_2 deux groupes compacts et $(\rho^1, V_1), (\rho^2, V_2)$ des représentations linéaires continues de G_1 et G_2 respectivement.

Définition On définit la représentation produit des représentations ρ^1 et ρ^2 comme étant l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \rho^1 \otimes \rho^2 : G_1 \times G_2 &\rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto \rho^1(g_1) \otimes \rho^2(g_2) \end{aligned}$$

3.3 Représentations linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement aux représentations linéaires d'un groupe compact G dans des espaces vectoriels V de dimension finie.

THÉORÈME 3.2 —

Toute représentation de dimension finie est somme directe de représentations irréductibles.

Démonstration Soit V une représentation linéaire de dimension finie de G . On raisonne par récurrence sur la dimension de V .

- Si $\dim V=0$, le théorème est évident (0 est somme directe de la famille vide de représentations irréductibles).
- Supposons le résultat vrai pour toute dimension strictement inférieure à $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons $\dim V=n$.
 - Si V est irréductible, c'est clair.
 - Sinon, comme on se place sur \mathbb{C} pour pouvoir choisir une structure de représentation unitaire, il est possible au vu de la proposition 8 de décomposer V en somme directe $V = W \oplus W^\perp$ avec $\dim W < \dim V$ et $\dim W^\perp < \dim V$. D'après l'hypothèse de récurrence, W et W^\perp sont sommes directes de représentations irréductibles, donc V aussi. \square

Remarquons que le fait que V soit de dimension finie permet la récurrence. En dimension infinie, le théorème devient faux.

Autre remarque :

Le théorème précédent montre que l'on peut réduire l'étude d'une représentation de dimension finie à l'étude des représentations irréductibles.

3.4 Décomposition d'une représentation hilbertienne unitaire

Dans ce paragraphe, on étudie des représentations de G dans des espaces de Hilbert (pas nécessairement de dimension finie) que l'on peut supposer en vertu du théorème 3.1 unitaires.

Lemme 1 Soit A un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On note $\|\cdot\|$ la norme sur H déduite de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on définit une norme sur l'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs linéaires de H dans lui-même par $\forall u \in \mathcal{L}(H), \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Alors :

1. L'ensemble $\text{Sp}(A)$ des valeurs propres de A contient $\|A\|$ ou $-\|A\|$ si $H \neq \{0\}$.
2. $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}, H(\lambda) := \text{Ker}(A - \lambda Id_H)$ est de dimension finie.
3. H est somme directe hilbertienne $H = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} H(\lambda)}$ des sous-espaces propres de A , c'est-à-dire que la somme directe est orthogonale et dense dans H .

Démonstration 1. On pose $\alpha = \|A\|$. On peut supposer que $\alpha \neq 0$, sinon $A = 0$ et le résultat est clair.

On a $\alpha^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{\|x\|=1} \langle A^2 x, x \rangle$ puisque A est autoadjoint. Donc $\exists (x_n) \in H^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^2 x_n, x_n \rangle = \alpha^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|(A^2 - \alpha^2 Id_H)x_n\|^2 &= \|A^2 x_n - \alpha^2 x_n\|^2 \\ &= \|A^2 x_n\|^2 + \alpha^4 \|x_n\|^2 - 2\alpha^2 \langle A^2 x_n, x_n \rangle \\ &= (\|A\|^2 \|x_n\|^2 + \alpha^4 \|x_n\|^2 - 2\alpha^2 \langle A^2 x_n, x_n \rangle) \quad (\text{on utilise la définition de la norme triple}) \\ &\leq 2\alpha^4 - 2\alpha^2 \langle A^2 x_n, x_n \rangle \quad (\text{on utilise } \|x_n\| = 1 \text{ et } \langle Ax_n, Ax_n \rangle \leq \alpha^2). \end{aligned}$$

D'où en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\|(A^2 - \alpha^2 Id_H)x_n\| \rightarrow 0$. Comme A est compact et (x_n) appartient à la boule unité fermée de H , $(A^2 x_n)$ possède une sous-suite $(A^2 x_{\phi(n)})$ qui converge, disons vers $y \in H$. L'inégalité triangulaire montre alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^2 x_{\phi(n)} = y$.

En posant $u = \frac{1}{\alpha^2} y$, il vient donc par passage à la limite $A^2 u = \alpha^2 u$, soit encore $(A - \alpha Id_H)(A + \alpha Id_H)u = 0$.

Si $(A + \alpha Id_H)u = 0$, alors u est vecteur propre de A de valeur propre $-\alpha$.

Sinon, $v = (A + \alpha Id_H)u \neq 0$ et alors v est vecteur propre de A de valeur propre α .

2. Prenons λ valeur propre de H non-nulle. Le sous-espace propre $H(\lambda)$ est un fermé de H , donc complet. En restreignant le produit scalaire de H à $H(\lambda)$, on a que $H(\lambda)$ est un sous-espace de Hilbert de H .

La boule unité fermée de $H(\lambda)$ est sa propre image par l'opérateur compact $\frac{1}{\lambda} A$. Par définition d'un opérateur compact, elle est donc relativement compacte. Or la boule unité fermée est fermée, donc elle est compacte (car son adhérence est elle-même). Le théorème de Riesz donne donc que $H(\lambda)$ est de dimension finie.

3. Puisque A est autoadjoint, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Notons F l'orthogonal de la somme directe des sous-espaces propres associés à A . Supposons $F \neq \{0\}$.

Mais alors, comme F est fermé (par propriété des espaces de Hilbert), la restriction de A à F est encore un opérateur autoadjoint compact. On peut donc appliquer 1) à $A|_F$ et trouver une valeur propre de A supplémentaire : exclu par définition de F !

Ainsi F est réduit au sous-espace nul et la somme directe des sous-espaces propres est dense dans H . \square

Proposition 9 Toute représentation unitaire (ρ, V) (V est de Hilbert) de G se décompose en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles de dimension finie.

Démonstration Comme toute sous-représentation de dimension finie est somme de sous-représentations irréductibles, il suffit de montrer que toute représentation unitaire non réduite à $\{0\}$ de G contient une sous-représentation non réduite à $\{0\}$ de dimension finie. On construit alors un opérateur autoadjoint compact A sur V , non nul et G -invariant. On prend une base hilbertienne de V (possible d'après le lemme de Zorn mais pas forcément dénombrable car V n'est pas supposé séparable) et on choisit une famille dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de la base. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ le projecteur orthogonal p_n de V sur le sous-espace vectoriel $V_n = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de dimension finie. Si $v \in V$ et $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|p_{n+p}(v) - p_n(v)\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \langle e_k | v \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\langle e_k | v \rangle|^2 \quad (\text{d'après Pythagore}) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | v \rangle|^2 \quad \text{terme qui tend vers 0 quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

En effet, la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |\langle e_k | v \rangle|^2 &= \sum_{k=0}^n \langle e_k | v \rangle \langle v | e_k \rangle \\ &= \langle v | p_n(v) \rangle \\ &\leq \|v\| \cdot \|p_n(v)\| \\ &\leq \|v\|^2 \end{aligned}$$

montre que la série $\sum_{k \geq 0} |\langle e_k | v \rangle|^2$ converge.

On en déduit aisément que pour $u, v \in V$, la suite $\left(\int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle p_n(\rho_t(u)) \mu_G(dt) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ (bien définie car les fonctions en t sont μ_G -intégrables) est de Cauchy dans l'espace de Banach V , donc convergente. En effet, si $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle p_{n+p}(\rho_t(u)) \mu_G(dt) - \int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle p_n(\rho_t(u)) \mu_G(dt) \right\| &= \left\| \int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle (p_{n+p} - p_n)(\rho_t(u)) \mu_G(dt) \right\| \\ &\leq \int_G |\langle v | \rho_t(u) \rangle| |(p_{n+p} - p_n)(\rho_t(u))| \mu_G(dt) \\ &\leq \int_G \|v\| \|\rho_t(u)\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2} \mu_G(dt) \\ &\leq \int_G \|v\| \|u\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2} \mu_G(dt) \end{aligned}$$

Or, d'une part, les fonctions $t \rightarrow \|v\| \|u\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2}$ sont mesurables.

En effet, l'application $t \rightarrow \rho_t(u)$ est continue (cela découle de la définition d'une représentation linéaire continue), donc par composition chaque fonction $t \rightarrow |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2$ pour $k \geq n+1$ est continue, donc mesurable. Ainsi, $t \rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2$ est mesurable comme limite de fonctions mesurables. Par composition de fonctions mesurables, on a donc ce que l'on veut.

De plus, $\forall t \in G, \|v\| \|u\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, l'inégalité de Bessel montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2 \leq \|\rho_t(u)\|^2$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|v\| \|u\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2} \leq \|v\| \|u\|^2.$$

Par conséquent, comme le terme de droite de l'inégalité précédente est μ_G -intégrable et indépendant de t , le théorème de convergence dominée donne que :

$$\int_G \|v\| \|u\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k | \rho_t(u) \rangle|^2} \mu_G(dt) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On pose alors $\int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle \rho_t(u) \mu_G(dt) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle p_n(\rho_t(u)) \mu_G(dt)$. Soit u un vecteur que l'on prend de norme 1 pour alléger l'écriture dans ce qui suit. On définit alors :

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto A(v) = \int_G \langle v | \rho_t(u) \rangle \rho_t(u) \mu_G(dt) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le fait que la représentation est unitaire et le fait que μ_G est de masse totale 1, on montre aisément de la même manière que pour la majoration précédente que A est 1-lipschitzien. L'opérateur A est un endomorphisme de V qui vérifie $\forall g \in G, \forall v \in V$,

$$\begin{aligned} \rho_g \circ A \circ \rho_{g^{-1}}(v) &= \rho_g \left(\int_G \langle \rho_{g^{-1}}(v) | \rho_t(u) \rangle \rho_t(u) \mu_G(dt) \right) \\ &= \int_G \langle \rho_{g^{-1}}(v) | \rho_t(u) \rangle \rho_{gt}(u) \mu_G(dt) \\ &= \int_G \langle \rho_{g^{-1}}(v) | \rho_{g^{-1}t}(u) \rangle \rho_t(u) \mu_G(dt) && \text{car } \mu_G \text{ est invariante par translation} \\ &= A(v) && \text{car } \langle \cdot | \cdot \rangle \text{ est } G\text{-invariant} \end{aligned}$$

Ainsi A est G -invariant. Il est facilement autoadjoint, c'est-à-dire $\forall v, w \in V, \langle A(v) | w \rangle = \langle v | A(w) \rangle$.

Il reste à démontrer qu'il est compact. Prenons donc (y_n) suite de $\overline{A(\mathcal{B}_V)}^{\mathbb{N}}$ (où on note \mathcal{B}_V la boule unité fermée de V) et montrons qu'elle possède une sous-suite convergente. Par propriété de l'adhérence de $A(\mathcal{B}_V)$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in \mathcal{B}_V, \|A(x_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$. Comme V est un Hilbert, V est réflexif, donc³ la boule unité est compacte pour la topologie faible $\sigma(V, V^*)$, ce qui implique que (x_n) possède une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge faiblement, disons vers

$x \in \mathcal{B}_V$. On montre alors que $\|A(x) - A(x_{\phi(n)})\| \rightarrow 0$. En effet, $\|A(x) - A(x_{\phi(n)})\| \leq \int_G |\langle x_{\phi(n)} - x, \rho_g(u) \rangle| \cdot \|\rho_g(u)\| \mu_G(dg)$

et

$$\begin{aligned} |\langle x_{\phi(n)} - x, \rho_g(u) \rangle| \|\rho_g(u)\| &\leq (\|x_{\phi(n)}\| + \|x\|) \|u\|^2 && \text{en utilisant Cauchy-Schwarz et } \rho \text{ unitaire} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Comme $g \mapsto 2$ est μ_G -intégrable, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |\langle x_{\phi(n)} - x, \rho_g(u) \rangle| \cdot \|\rho_g(u)\| \mu_G(dg) = \int_G \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_{\phi(n)} - x, \rho_g(u) \rangle| \cdot \|\rho_g(u)\| \mu_G(dg) = 0.$$

On considère à présent la suite $(y_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de (y_n) . On fixe $\epsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(x) - A(x_{\phi(n)})\| = 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \leq N, \frac{1}{\phi(n) + 1} \leq \epsilon \text{ et } \|A(x) - A(x_{\phi(n)})\| \leq \epsilon.$$

La majoration $\|y_{\phi(n)} - A(x)\| \leq \|y_{\phi(n)} - A(x_{\phi(n)})\| + \|A(x_{\phi(n)}) - A(x)\| \leq$ montre alors qu'à partir du rang N , on a $\|y_{\phi(n)} - A(x)\| \leq 2\epsilon$.

Ainsi, $(y_{\phi(n)})$ est une suite extraite de (y_n) qui converge.

Le lemme 1 donne donc l'existence d'une valeur propre non nulle (car $A \neq 0$ puisque $u \neq 0$) de A notée λ et que $H(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda Id_H)$ est de dimension finie. Soit enfin $g \in G$. Comme ρ_g commute avec A , le sous-espace propre $H(\lambda)$ de A est stable par ρ_g (c'est un résultat immédiat d'algèbre linéaire). Cela montre que $H(\lambda)$ est stable par G et donc une sous-représentation de dimension finie. \square

Remarque : La proposition précédente montre en particulier que toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.

3. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Banach-Alaoglu, lequel repose toutefois sur le lemme de Zorn.

4 Caractère d'une représentation de dimension finie

On suppose toujours G compact. Sauf mention explicite du contraire, les espaces vectoriels V considérés seront toujours de dimension finie.

4.1 Définition et propriétés

Définition Soit $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel de dimension finie V . On appelle caractère de la représentation ρ l'application

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

On va voir que le caractère d'une représentation caractérise cette représentation.

Proposition 10 Si ρ est une représentation de G , χ_ρ est une fonction continue sur G .

Démonstration χ_ρ est continue comme composée des applications ρ continue et trace continue. \square

Proposition 11 Si χ désigne le caractère d'une représentation ρ de degré n et 1 désigne le neutre de G , on a :

1. $\chi(1) = n$
2. $\forall g, h \in G, \chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$

Démonstration Il suffit de remarquer que $\text{tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g^{-1})\rho(g)\rho(h)) = \text{tr}(\rho_g(h))$. \square

Remarque : Toujours en utilisant la propriété de la trace, on montrerait de même que deux représentations isomorphes ont même caractère.

Définition On appelle fonction centrale sur G toute application $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $\forall x, y \in G, f(xy) = f(yx)$

Remarque : La deuxième partie de la proposition montre que les caractères sont des fonctions centrales.

Proposition 12 Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires continues de G . On note χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ de la représentation $\rho_1 \oplus \rho_2$ est égal à $\chi_1 + \chi_2$.

Démonstration Soit $g \in G$. On se donne ρ_g^1 et ρ_g^2 sous forme matricielle R_g^1 et R_g^2 . La représentation $\rho_1 \oplus \rho_2$ est alors donnée sous forme matricielle par $R_g = \begin{pmatrix} R_g^1 & 0 \\ 0 & R_g^2 \end{pmatrix}$ D'où $\chi(g) = \text{tr}(R_g) = \text{tr}(R_g^1) + \text{tr}(R_g^2) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$. D'où le résultat. \square

Proposition 13 Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires continues de G . On note χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ de la représentation produit $\rho_1 \otimes \rho_2$ est donné par $\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, \chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$.

Démonstration C'est une conséquence de la proposition 6 (1). \square

Remarque : Dans la suite, on notera $\chi_1 \otimes \chi_2$ le caractère de la représentation produit.

Définition On parle de caractère irréductible d'un groupe G pour désigner un caractère d'une représentation irréductible de G .

On note $\text{Irr}(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G .

4.2 Lemme de Schur et application

Lemme 2 (de Schur) Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de dimension finie de G . Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ linéaire telle que $\forall g \in G, \rho_g^2 \circ f = f \circ \rho_g^1$. Alors :

- ρ^1 et ρ^2 sont isomorphes ou $f = 0$.
- Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}, f = \lambda \text{Id}_{V_1}$

4. On dit que f est un morphisme de représentations ou un opérateur d'entrelacement

Démonstration Pour le premier point, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont G -invariants car f est un morphisme de représentations. Comme les représentations sont irréductibles, on a d'une part, $\text{Ker } f = \{0\}$ ou $\text{Ker } f = V_1$, d'autre part $\text{Im } f = \{0\}$ ou $\text{Im } f = V_2$. Si $f \neq 0$, on a donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et $\text{Im } f = V_2$. Donc f est un isomorphisme de V_1 sur V_2 . Pour le second point, puisque \mathbb{C} est algébriquement clos, il existe λ valeur propre de f . Alors facilement $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{V_1})$ est G -invariant et par définition $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{V_1}) \neq \{0\}$. Ainsi par hypothèse sur la représentation, on a $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_{V_1}) = V_1$ puis $f - \lambda \text{Id}_{V_1} = 0$. \square

Proposition 14 Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles et $h : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire. Posons $h^0 = \int_G (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1 \mu_G(dt)$. Alors

1. Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $h^0 = 0$
2. Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, h^0 est une homothétie de rapport $\frac{\text{tr}(h)}{n}$ où $n = \dim V_1$.

Démonstration On montre aisément que h^0 est un morphisme de représentations. Le lemme de Schur appliqué à $f = h^0$ montre que dans le premier cas, $h^0 = 0$ et dans le second cas que h^0 est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce dernier cas, on a donc : d'une part,

$$\text{tr}(h^0) = n\lambda$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{tr}(h^0) &= \int_G \text{tr} \left((\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1 \right) \mu_G(dt) \\ &= \int_G \text{tr} \left(\rho_t^1 (\rho_t^2)^{-1} h \right) \mu_G(dt) \\ &= \text{tr}(h) \cdot \mu_G(G) \\ &= \text{tr}(h) \end{aligned}$$

(1)
 \square

Regardons comment les résultats de la proposition précédente se traduisent matriciellement. On note $\rho_t^1 = (a_{i,j}(t))$ et $\rho_t^2 = (b_{i,j}(t))$. Les applications linéaires h et h^0 sont représentées respectivement par les matrices $(h_{i,j})_{1 \leq i \leq \dim(V_2), 1 \leq j \leq \dim(V_1)}$ et $(h_{i,j}^0)_{1 \leq i \leq \dim(V_2), 1 \leq j \leq \dim(V_1)}$

On a par définition de h^0 :

$$\begin{aligned} h_{i,j}^0 &= \int_G \sum_{k=1}^{\dim(V_2)} \sum_{l=1}^{\dim(V_1)} b_{i,k}(t^{-1}) h_{k,l} a_{l,j}(t) \mu_G(dt) \\ &= \sum_{k,l} \left(\int_G b_{i,k}(t^{-1}) a_{l,j}(t) \mu_G(dt) \right) h_{k,l} \end{aligned}$$

(2)

Donc le membre de droite est une forme linéaire en les $h_{k,l}$.

Dans le cas (1) de la proposition 14, on a $\forall i, j, h_{i,j}^0 = 0$. Ainsi la forme linéaire s'annule pour tout système de valeurs $\{h_{k,l}\}$; ses coefficients sont donc nuls. Donc $\forall i, j, k, l, \int_G b_{i,k}(t^{-1}) a_{l,j}(t) \mu_G(dt) = 0$.

Dans le cas (2), en notant $n = \dim(V_1) = \dim(V_2)$, on a $h^0 = \frac{\text{tr}(h)}{n} \text{Id}_{V_1}$. D'où $h_{i,j}^0 = \frac{\text{tr}(h)}{n} \delta_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_{k,k} \delta_{i,j}$.

Il résulte donc en égalant les coefficients des $h_{k,l}$: $\frac{1}{n} \delta_{i,j} \delta_{k,l} = \int_G b_{i,k}(t^{-1}) a_{l,j}(t) \mu_G(dt)$.

4.3 Conséquence : relations d'orthogonalité des caractères.

Proposition 15 Si χ est le caractère d'une représentation ρ de degré n , on a $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Démonstration Comme G est compact et ρ continue, $\rho(G)$ est compact, donc borné. Donc pour tout g dans G , pour tout n dans \mathbb{Z} , $\rho(g)^n$ est un automorphisme \mathbb{C} -linéaire borné, donc les valeurs propres de $\rho(g)$ sont de module 1 nécessairement.

De plus, $\forall g \in G, \text{tr}(\rho(g)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \lambda$ et l'algèbre linéaire nous donne que $\lambda \in \text{Sp}(\rho(g)) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(\rho(g)^{-1})$ avec même multiplicité pour λ et $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\forall g \in G, \overline{\chi(g)} = \overline{\text{tr}(\rho(g))} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \bar{\lambda} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \frac{1}{\lambda} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}((\rho_g)^{-1})} \lambda = \text{tr}(\rho(g^{-1})) = \chi(g^{-1})$. \square

Dans la suite, on désigne par $\langle | \rangle$ sur l'espace $L^2(G)$ des fonctions sur G de carré μ_G -intégrable (modulo la relation d'équivalence " μ_G -presque partout") le produit scalaire défini par $\forall f, g \in L^2(G), \langle f | g \rangle = \int_G f(t) \overline{g(t)} \mu_G(dt)$.

THÉORÈME 4.1 —

La famille $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}}$ des caractères irréductibles de G est orthonormée pour $\langle | \rangle$.

Démonstration On prend χ et χ' deux caractères associés à des classes de représentations de G non-isomorphes, ρ (de degré n) et ρ' (de degré n') respectivement.

Notons $(r_{i,j}(t))$ et $(r'_{i,j}(t))$ les matrices associées à $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ respectivement. En utilisant la proposition 15 puis les encadrés du paragraphe 4.2, il vient dans le cas de représentations isomorphes :

$$\begin{aligned}
\langle \chi | \chi \rangle &= \int_G \chi(t) \overline{\chi(t)} \mu_G(dt) \\
&= \int_G \chi(t) \chi(t^{-1}) \mu_G(dt) \\
&= \int_G \sum_{i,j} r_{i,i}(t) r_{j,j}(t^{-1}) \mu_G(dt) \\
&= \sum_{i,j} \int_G r_{i,i}(t) r_{j,j}(t^{-1}) \mu_G(dt) \\
&= \sum_{i,j} \frac{1}{n} \delta_{i,j} \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3}$$

De même, on a dans le cas de représentations non-isomorphes,

$$\begin{aligned}
\langle \chi | \chi' \rangle &= \int_G \chi(t) \overline{\chi'(t)} \mu_G(dt) \\
&= \sum_{i,j} \int_G r_{i,i}(t) r'_{j,j}(t^{-1}) \mu_G(dt) \\
&= \sum_{i,j} 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

\square

On a déjà vu que deux représentations isomorphes ont même caractère; le théorème suivant montre que la réciproque est vraie.

THÉORÈME 4.2 —

Deux représentations de même caractère sont isomorphes.

Démonstration Il suffit de montrer que les deux représentations de même caractère contiennent le même nombre de fois chaque représentation irréductible. Il suffit donc de montrer que si V est une représentation linéaire continue de G de caractère χ décomposée en somme directe de représentations irréductibles $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$, le nombre des W_i isomorphes à une

représentation irréductible W ne dépend pas de V (mais uniquement du caractère de V qui est χ). Notons pour tout i dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ χ_i le caractère de W_i et ϕ le caractère de W . Alors on a : $\langle \chi | \phi \rangle \stackrel{(\text{prop } 12)}{=} \left\langle \sum_{i=1}^k \chi_i | \phi \right\rangle = \sum_{i=1}^k \langle \chi_i | \phi \rangle$ avec d'après les relations

$$\text{d'orthogonalité, } \langle \chi_i | \phi \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } W_i \text{ isomorphe à } W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $\langle \chi | \phi \rangle$ est le nombre de W_i isomorphes à W . Comme ce produit scalaire est le même pour toute représentation de caractère χ , le résultat en découle. \square

Le résultat précédent montre qu'on peut ramener l'étude d'une représentation de dimension finie à l'étude de son caractère.

THÉORÈME 4.3 —

Une représentation (ρ, V) de caractère χ est irréductible si et seulement si $\langle \chi | \chi \rangle = 1$.

Démonstration On a déjà vu que si ρ est irréductible, son caractère χ est de norme 1. Supposons à présent que $\langle \chi | \chi \rangle = 1$.

D'après les théorèmes 3.2 et 4.2, toute représentation V de caractère χ est isomorphe à une somme directe $V = \bigoplus_{i=1}^h W_i^{m_i}$ où les W_i sont des représentations irréductibles de caractères irréductibles χ_i deux à deux non-équivalentes et où les $m_i = \langle \chi | \chi_i \rangle$ sont des entiers positifs. Alors $\chi = \sum_{i=1}^h m_i \chi_i$ puis $\langle \chi | \chi \rangle = \sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi_i | \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^h m_i^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle \chi | \chi \rangle = 1 &\Rightarrow \exists i_0 \in \llbracket 1, h \rrbracket, m_{i_0} = 1 \text{ et } \forall i \neq i_0, m_i = 0 \\ &\Rightarrow V \text{ isomorphe à l'un des } W_i \\ &\Rightarrow V \text{ irréductible.} \end{aligned}$$

\square

Ce théorème constitue donc un critère essentiel d'irréductibilité.

4.4 Coefficients matriciels et bases hilbertiennes

On note $L^2(G)^G$ le sous-espace de $L^2(G)$ formé des fonctions centrales de carré intégrable sur G . C'est un sous-espace fermé de $L^2(G)$, donc un espace de Hilbert.

Définition Un coefficient matriciel de (ρ, V) est une fonction de la forme

$$c_{v, v^*} : G \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto v^*(\rho_g(v)) \text{ où } v \in V, v^* \in V^* \text{ (dual de } V).$$

Remarque :

- Un coefficient matriciel est continu, donc appartient à $L^2(G)$.
- Dans la suite, on prendra souvent pour v^* la forme linéaire $x \mapsto \langle x | v \rangle_V$ où $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ est un produit scalaire sur V .

Si (ρ, V) est une représentation irréductible de dimension finie, on note $L_\rho^2(G)$ le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ engendré par les coefficients matriciels de ρ . On note que $L_\rho^2(G)$ est de dimension finie inférieure ou égale à $(\dim V)^2$; en effet, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne une base de V et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sa base duale, $L_\rho^2(G)$ est simplement engendré par le système de coefficients matriciels $\left\{ c_{e_i, e_j^*} \right\}_{1 \leq i, j \leq n}$ de cardinal inférieur ou égal à n^2 . De plus $L_\rho^2(G)$ est stable sous les actions de G sur $L^2(G)$ par translation à gauche et à droite. On définit par exemple l'action de G sur $L^2(G)$ à gauche par :

$$G \times L^2(G) \rightarrow L^2(G) \\ (g, f) \mapsto (t \mapsto f(tg)).$$

On vérifie que $g \bullet c_{v, v^*} = c_{\rho_g(v), v^*}$.

Proposition 16 $L^2(G)$ est une représentation unitaire de G .

Démonstration $L^2(G)$ muni du produit scalaire défini au paragraphe 4.3 est clairement un espace préhilbertien. Il est immédiat, grâce à l'invariance par translation à droite de la mesure de Haar, de constater que le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est G -invariant, c'est-à-dire $\forall h \in G, \langle h \cdot f | h \cdot g \rangle = \langle f | g \rangle$. Il reste à voir que $L^2(G)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$ déduite de son produit scalaire. C'est un résultat qui repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3 Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si toute série $\sum_n u_n$ vérifiant $\sum_n \|u_n\| < \infty$ converge dans F (i.e les sommes partielles $v_n = \sum_{i \leq n} u_i$ vérifient $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ pour un certain $v \in F$), alors F est un Banach.

Lemme 4 Toute suite $(f_n) \in (L^2(G))^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ vérifie les deux points suivants :

- la série $\sum_n f_n$ est presque partout absolument convergente
- la série $\sum_n f_n$ converge dans $L^2(G)$ et $\|\sum_n f_n\| \leq \sum_n \|f_n\|$.

Démonstration (du lemme 4) On pose $S_n := \sum_{k=1}^n f_k$ et $\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n |f_k|$. Les \tilde{S}_n forment une suite croissante de fonctions mesurables positives, de limite notée \tilde{S} . D'après le théorème de la limite monotone, on a :

$$\int_G \tilde{S}^2 d\mu_G = \lim_n \uparrow \int_G \tilde{S}_n^2 d\mu_G.$$

$$\text{Or, } \int_G \tilde{S}_n^2 d\mu_G = \|\tilde{S}_n\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\| \right)^2 \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \right)^2 < \infty.$$

Par conséquent, la fonction \tilde{S}^2 est μ_G -intégrable, donc μ_G -presque partout finie. Il en est donc de même de \tilde{S} . Cela signifie que la série $\sum_n f_n(x)$ converge absolument (*a fortiori* converge) sur l'ensemble $\{x | \tilde{S}(x) < \infty\}$ dont le complémentaire est négligeable. Cela règle le premier point du lemme.

On pose alors $f(x) := \sum_n f_n(x)$ pour tout $x \in G$ tel que la série associée soit absolument convergente et (de manière arbitraire) $f(x) = 0$ ailleurs. On a bien sûr $|f| \leq \tilde{S}$ puis

$$\int_G |f|^2 d\mu_G \leq \int_G \tilde{S}^2 d\mu_G \leq \infty.$$

Ainsi, $f \in L^2(G)$ et l'inégalité annoncée suit. □

THÉORÈME 4.4 (DE PETER-WEYL) —

Soit G un groupe compact. Pour toute représentation irréductible (ρ, V_ρ) de G ,

1. Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels \mathbb{C} -linéaire de $V_\rho^{\dim(\rho)}$ sur $L_\rho^2(G)$.
2. Les coefficients matriciels des représentations irréductibles engendrent un sous-espace dense de $L^2(G)$. Cela se traduit par l'écriture en somme directe hilbertienne suivante : $L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\rho \in \hat{G}} L_\rho^2(G)}$.

Démonstration Fixons (ρ, V) irréductible et choisissons un produit scalaire G -invariant $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ sur V . (On a vu qu'un tel produit scalaire existe). Pour $v, v' \in V$, on note $c_{v, v'}$ le coefficient matriciel $g \mapsto \langle \rho_g(v) | v' \rangle_V$. Soit (π, W) une autre représentation irréductible de G et $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ un produit scalaire G -invariant sur W . A $v' \in V$ et $w \in W$ fixés, on considère l'application \mathbb{C} -linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{v', w} : V &\rightarrow W \\ v &\mapsto \int_G \langle \rho_g(v) | v' \rangle_V \overline{\langle \rho_g(w) | w \rangle_W} \mu_G(dg) \end{aligned}$$

C'est un morphisme de représentations car μ_G est invariante par translation. Le lemme de Schur donne donc les résultats suivants :

1. Si V et W ne sont pas isomorphes, alors $\Phi_{v', w} = 0$. Ainsi pour tous $v, v' \in V$ et $w, w' \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \langle c_{v, v'} | c_{w', w} \rangle &= \int_G \langle \rho_g(v) | v' \rangle_V \overline{\langle \rho_g(w') | w' \rangle_W} \mu_G(dg) \\ &= \int_G \langle \rho_g(v) | v' \rangle_V \langle w | \rho_g(w') \rangle_W \mu_G(dg) \\ &= \int_G \langle \rho_g(v) | v' \rangle_V \langle \rho_{g^{-1}}(w) | w' \rangle_W \mu_G(dg) \\ &= \langle \Phi_{v', w}(v) | w' \rangle_W = 0 \end{aligned}$$

Donc les sous-espaces $L_\rho^2(G)$ et $L_\pi^2(G)$ engendrés par les coefficients matriciels sont orthogonaux pour le produit scalaire sur $L^2(G)$ défini plus haut.

2. Si V et W sont isomorphes, on peut supposer $V=W$ et alors $\Phi_{v',w} = \lambda_{v',w} \text{Id}$ où $\lambda_{v',w}$ dépend semi-linéairement de v' et linéairement de w . Le même calcul que celui qui précède montre que $\langle c_{v,v'} | c_{w',w} \rangle = \lambda_{v',w} \langle v | w' \rangle_V$. On remarque notamment en utilisant la proposition 7 que $\langle c_{v,v'} | c_{w',w} \rangle = \langle c_{w,w'} | c_{v',v} \rangle$; donc par symétrie, il vient :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \langle c_{v,v'} | c_{w',w} \rangle = \lambda \langle w | v' \rangle_V \langle v | w' \rangle_V. \text{ En prenant } \begin{cases} v = w' \\ v' = w \end{cases}, \text{ on constate } \lambda > 0 \text{ et donc } \lambda \neq 0.$$

Donc si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de V , alors les c_{e_i, e_j} avec $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ forment une famille orthogonale de $L_\rho^2(G)$ et $\dim L_\rho^2(G) = (\dim V)^2$. On peut rendre cette famille orthonormale en utilisant $\|\chi_\rho\| = 1$ (car ρ irréductible).

En effet, l'égalité $\chi_\rho = \sum_{i=1}^n c_{e_i, e_i}$ et le théorème de Pythagore montrent que $\lambda = \frac{1}{n}$. Il en résulte que $\mathcal{B}_\rho = (\sqrt{n} c_{e_i, e_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormée de $L_\rho^2(G)$.

Considérons à présent pour (ρ, V) représentation irréductible de dimension n l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad (V_\rho)^n &\rightarrow L_\rho^2(G) \\ (v_1, v_2, \dots, v_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n c_{v_i, e_i^*} \end{aligned}$$

Ψ est clairement surjectif par définition de $L_\rho^2(G)$ et l'utilisation du fait que les c_{e_i, e_j} forment une base orthogonale montre que Ψ est également injectif. A ce stade, on a donc montré la première partie du théorème et le fait que la somme $H = \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} L_\rho^2(G)$ est orthogonale. On montre encore qu'elle est dense dans $L^2(G)$ en montrant que son orthogonal H^\perp est réduit à $\{0\}$.

Supposons $H^\perp \neq \{0\}$. La proposition 8 montre que H^\perp est stable sous G . De plus, on a vu que $(L^2(G), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est une représentation unitaire de G . La proposition 9 donne alors que ce sous-espace contient une représentation irréductible de dimension finie, notée \mathcal{V} . Soit $\rho \in \widehat{G}$ la classe d'isomorphie de \mathcal{V} . Pour $f \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, la fonction F sur G définie par $g \mapsto F(g) = \int_G f(xg) \overline{f(x)} \mu_G(dx)$ est un coefficient matriciel de \mathcal{V} , donc un élément de $L_\rho^2(G)$. Or, pour $v, v' \in V$,

$$\begin{aligned} \langle F, c_{v, v'} \rangle &= \int_G F(g) \overline{\langle \rho_g(v) | v' \rangle_V} \mu_G(dg) \\ &= \int_G \int_G f(gx) \overline{f(x)} \overline{\langle \rho_g(v) | v' \rangle_V} \mu_G(dx) \mu_G(dg) \\ &= \int_G \int_G f(h) \overline{f(x)} \overline{\langle \rho_{hx^{-1}}(v) | v' \rangle_V} \mu_G(dx) \mu_G(dh) \\ &= \int_G \overline{f(x)} \left(\int_G f(h) \overline{\langle \rho_{hx^{-1}}(v) | v' \rangle_V} \mu_G(dh) \right) \mu_G(dx) \\ &= \int_G \overline{f(x)} \langle f | c_{\rho_{x^{-1}}(v), v'} \rangle_V \mu_G(dx) \end{aligned}$$

Comme $f \in H^\perp$, on trouve donc $\forall v, v' \in V, \langle F, c_{v, v'} \rangle = 0$. D'où $F = 0$. En particulier en évaluant F en l'élément neutre 1 du groupe G , on trouve $\|f\|^2 = \int_G |f(x)|^2 \mu_G(dx) = 0$ puis $f = 0$. On a la contradiction voulue. \square

On remarquera que cette démonstration fournit une base orthonormée explicite de $L^2(G)$; il suffit en effet de prendre la réunion de toutes les bases orthonormées \mathcal{B}_ρ pour $\rho \in \widehat{G}$.

THÉORÈME 4.5 —

La famille des caractères irréductibles $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}}$ de G est une base hilbertienne de $L^2(G)^G$.

On a donc $\forall f \in L^2(G)^G, f = \sum_{\rho \in \widehat{G}} \langle f | \chi_\rho \rangle \chi_\rho$.

Démonstration On a déjà vu que les caractères sont des fonctions centrales. Le théorème 4.1 montre que la famille $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}}$ est orthonormée pour le produit scalaire de $L^2(G)$ restreint à $L^2(G)^G$.

Montrons à présent que la famille engendre un sous-espace dense de $L^2(G)^G$. Prenons pour cela $f \in L^2(G)^G$ vérifiant $\forall \rho \in \widehat{G}, \langle f | \chi_\rho \rangle = 0$ et montrons que $f = 0$. On introduit à (ρ, V) irréductible fixée de dimension n_ρ , l'endomorphisme de V suivant : $\rho_f = \int_G f(t) \rho(t^{-1}) \mu_G(dt)$. On vérifie sans difficulté grâce à l'invariance par translation de la mesure de Haar que $\forall g \in G, \rho_g \rho_f \rho_g^{-1} = \rho_f$, ce qui montre que ρ_f est un opérateur d'entrelacement. On a donc d'après le lemme de Schur :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \rho_f = \lambda \text{Id}_V.$$

De plus, $\text{tr}(\rho_f) = n_\rho \lambda$ et

$$\begin{aligned}\text{tr}(\rho_f) &= \int_G f(t) \chi(t^{-1}) \mu_G(dt) \\ &= \int_G f(t) \overline{\chi(t)} \mu_G(dt) \\ &= \langle f | \chi \rangle\end{aligned}$$

Donc $\rho_f = \frac{\langle f | \chi \rangle}{n_\rho} \text{Id}_V = 0$ par hypothèse sur f . Donc $\forall v, v' \in V$,

$$\begin{aligned}\langle f | c_{v, v'} \rangle &= \int_G f(t) \langle \rho_t(v) | v' \rangle_V \mu_G(dt) \\ &= \int_G f(t) \langle v' | \rho_t(v) \rangle_V \mu_G(dt) \\ &= \int_G f(t) \langle \rho_{t^{-1}}(v') | v \rangle_V \mu_G(dt) \quad \text{en prenant } \langle | \rangle_V \text{ } G\text{-invariant} \\ &= \langle \rho_f(v') | v \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Le théorème de Peter-Weyl donne donc $f = 0$ puis le résultat. □

4.5 Complément sur les groupes compacts

Proposition 17 *Si G et H désignent deux groupes compacts, l'application*

$$\begin{aligned}\text{Irr}(G) \times \text{Irr}(H) &\rightarrow \text{Irr}(G \times H) \\ (\phi, \psi) &\mapsto \phi \otimes \psi\end{aligned}$$

est bijective.

4.6 Le cas des groupes abéliens compacts

Dans le cas où G désigne un groupe compact commutatif, l'étude des représentations de G se simplifie grâce au théorème suivant.

THÉORÈME 4.6 —

Si G est un groupe compact abélien et (ρ, V) une représentation irréductible de G de dimension finie, alors $\dim V = 1$.

Démonstration Pour $g \in G$, ρ_g est un morphisme de représentations ; en effet, $\forall h \in G, \forall v \in V$,

$$\begin{aligned}\rho_g(\rho_h(v)) &= \rho_{gh}(v) \\ &= \rho_{hg}(v) \\ &= \rho_h(\rho_g(v)).\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Schur avec $\rho^1 = \rho^2 = \rho$, $V_1 = V_2 = V$ et $f = \rho_g$ linéaire, il vient :

$$\exists \lambda_g \in \mathbb{C}, \rho_g = \lambda_g \text{Id}_V.$$

On considère alors $v_0 \in V \setminus \{0\}$. Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(v_0)$ de V engendré par v_0 est donc G -invariant. Grâce à l'irréductibilité de (ρ, V) , on conclut que $\text{Vect}(v_0) = V$.

Mais alors, $\dim V = 1$. □

Conséquence :

Grâce au théorème précédent et à la remarque suivant le théorème 3.2, l'étude des représentations d'un groupe compact abélien G se ramène donc à l'étude de l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, que l'on appelle encore caractères linéaires de G .

5 Représentations induites en dimension finie

5.1 Algèbre d'un groupe

Soit G un groupe fini. On notera dans la suite $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ où $(\alpha_g)_g$ désigne une famille de nombres complexes. Cela fait de $\mathbb{C}[G]$ un \mathbb{C} -espace vectoriel de base G . Notons que l'on peut munir $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre sur \mathbb{C} en définissant une multiplication sur $\mathbb{C}[G]$ par $\left(\sum_i \alpha_i g_i \right) \times \left(\sum_j \beta_j g_j \right) = \sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j) (g_i g_j)$. Notons que cette multiplication interne prolonge la loi de groupe. On obtient ainsi une algèbre appelée algèbre de G sur \mathbb{C} . Remarquons tout de suite que $G \subset \mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[G]$.

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire de G . On peut munir V d'une structure de $\mathbb{C}[G]$ -module via l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G] \times V &\rightarrow V \\ \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g, x \right) &\mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g \rho_g(x) \end{aligned}$$

Inversement, la donnée d'une structure de $\mathbb{C}[G]$ -module pour V définit une représentation linéaire de G dans V . En effet, si V est muni d'une loi de composition externe \bullet , on définit :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto (x \mapsto g \bullet x). \end{aligned}$$

Cette application est bien d'image incluse dans $\text{GL}(V)$:

- en travaillant à $g \in G$ fixé, on voit que ρ_g est un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel V .
D'une part, \bullet est une application à valeurs dans V .
D'autre part, pour $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \rho_g(x + \lambda y) &= g \bullet (x + \lambda y) \\ &= g \bullet x + g \bullet (\lambda y) \\ &= g \bullet x + (\lambda g) \bullet y \\ &= g \bullet x + \lambda (g \bullet y) \\ &= \rho_g(x) + \lambda \rho_g(y), \end{aligned}$$

le passage de la deuxième ligne à la troisième ligne utilise l'axiome d'associativité pour la structure de module, possible en supposant que $\lambda v = \lambda \bullet v$ (autrement dit, on fait implicitement l'hypothèse que la structure de $\mathbb{C}[G]$ -module sur V est telle que le sous-ensemble \mathbb{C} de $\mathbb{C}[G]$ agit sur V comme la multiplication des scalaires sur le \mathbb{C} -espace vectoriel V).

- Pour $g \in G$, $\rho_g(\rho_{g^{-1}}(x)) = \rho_g(g^{-1} \bullet x) = g \bullet (g^{-1} \bullet x) = (gg^{-1}) \bullet x$.

D'où $\rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \text{Id}_V$. De même, $\rho_{g^{-1}} \circ \rho_g = \text{Id}_V$. Cela montre que $\rho_{g^{-1}}$ est l'inverse de ρ_g .

Ensuite, on vérifie que ρ est bien un morphisme de groupes. Cela résulte du calcul suivant : si $g, g' \in G$ et $x \in V$, on a : $\rho_{gg'}(x) = (gg') \bullet x = g \bullet (g' \bullet x) = g \bullet (\rho_{g'}(x)) = \rho_g((\rho_{g'}(x)))$.

Cela prouve que $\rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$.

Pour la suite, si G désigne un groupe et si V et E sont deux représentations de G , on notera par $\text{Hom}_G(V, E)$ l'espace vectoriel des homomorphismes de $\mathbb{C}[G]$ -modules de V dans E .

5.2 Définitions

5.2.1 Restriction d'une représentation

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . Soit (ρ, V) une représentation de G .

Définition La restriction de ρ au sous-groupe H de G est une représentation de H , appelée représentation restreinte et notée $\text{Res}_H^G V$.

5.2.2 Représentation induite

Soit G un groupe et H un sous groupe de G . Soient V un espace vectoriel complexe muni d'une structure de $\mathbb{C}[G]$ -module (ce qui d'après le paragraphe 5.1 revient à se donner une représentation V de G) et W une représentation de H .

Comme $\mathbb{C}[G]$ est un $\mathbb{C}[H]$ -module à droite et W un $\mathbb{C}[H]$ -module à gauche, on peut définir le produit tensoriel $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ (qui est à voir comme le $\mathbb{C}[G]$ -module déduit de W par extension des scalaires de $\mathbb{C}[H]$ à $\mathbb{C}[G]$).

Définition On dit que la représentation V est l'induite de H à G de la représentation W si $V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. On note alors $V = \text{Ind}_H^G(W)$.

On garde les notations précédentes pour la proposition qui suit. On note par \mathcal{R} un système de représentants des classes à gauche modulo H (on a donc aussi par extension une action \cdot de G sur $\mathbb{C}[H]$). La proposition 3 montre que W est isomorphe au $\mathbb{C}[H]$ -module $\mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. On définit ainsi une action de G sur W par :

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W &\rightarrow \mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \\ (g, h \otimes w) &\mapsto (g \cdot h) \otimes w \end{aligned}$$

Proposition 18 Avec les outils introduits, la définition précédente revient à dire que $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation induite de W si l'on a $V = \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} g \cdot W$.

Démonstration Les éléments de \mathcal{R} forment une base du $\mathbb{C}[H]$ -module à droite $\mathbb{C}[G]$.

On peut donc écrire $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} g \cdot \mathbb{C}[H]$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W &= \left(\bigoplus_{g \in \mathcal{R}} g \cdot \mathbb{C}[H] \right) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \\ &= \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} (g \cdot \mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W) \\ &= \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} g \cdot W && \text{par définition de l'action de } G \text{ sur } W \end{aligned}$$

5.3 Propriétés de l'induction

Proposition 19 L'opération d'induction est transitive. Autrement dit, si H est un sous-groupe de G , lui-même sous-groupe d'un groupe K , on a

$$\text{Ind}_G^K(\text{Ind}_H^G) \simeq \text{Ind}_H^K.$$

Démonstration Cela se voit en utilisant notamment l'associativité du produit tensoriel. Soit W muni d'une structure de $\mathbb{C}[H]$ -module.

$$\begin{aligned} \text{Ind}_G^K(\text{Ind}_H^G(W)) &= \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} \text{Ind}_H^G(W) \\ &\simeq \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} (\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W) \\ &= (\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]) \otimes_{\mathbb{C}[H]} W && \text{(associativité)} \\ &\simeq \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W && \text{(résulte de la proposition 3)} \\ &= \text{Ind}_H^K(W). \end{aligned}$$

On a aussi la propriété d'adjonction suivante.

Proposition 20 $\text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, E) \cong \text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G E)$.

Démonstration Cela résulte en grande partie de la propriété du produit tensoriel suivante :

$$\text{Hom}_G(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W, E) \cong \text{Hom}_H(W, \text{Hom}_G(\mathbb{C}[G], E)).$$

5.4 Caractère d'une représentation induite et formule de réciprocité

En gardant les mêmes notations que précédemment, pour toute fonction centrale continue f sur H , on considère la fonction f' sur G définie par

$$\forall g \in G, f'(g) = \sum_{\substack{t \in \mathcal{R} \text{ tq} \\ t^{-1}gt \in H}} f(t^{-1}gt).$$

On dit que f' est la fonction induite par f sur G . On note $f' = \text{Ind}_H^G(f)$.

Proposition 21 1. La fonction $\text{Ind}_H^G(f)$ est centrale sur G .

2. Si f est le caractère d'une représentation W de H , $\text{Ind}_H^G(f)$ est le caractère de la représentation induite $\text{Ind}_H^G(W)$ de G .

Démonstration 1. C'est évident au vu de la définition.

2. On suppose (ρ, V) induite par (θ, W) . On note χ_ρ et χ_θ les caractères associés. L'hypothèse de la proposition est donc $f = \chi_\theta$.

On a $V = \bigoplus_{r \in \mathcal{R}} \rho_r(W)$.

Prenons $u \in G$. On veut déterminer $\chi_\rho(u) = \text{tr}_V(\rho_u)$. Pour cela, on peut utiliser une base \mathcal{B} de V qui est la réunion des bases des $\rho_r(W)$.

En écrivant le produit ur d'éléments de G sous la forme $r_u t$, où $r_u \in \mathcal{R}$ et $t \in H$, on voit que ρ_u transforme $\rho_r(W)$ en $\rho_{r_u}(W)$.

Les indices $r \neq r_u$ donnent des termes diagonaux nuls dans la matrice correspondante à ρ_u dans la base \mathcal{B} . Les autres termes donnent la trace de ρ_u sur les $\rho_r(W)$.

On obtient donc

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \text{tr}_{\rho_r(W)}(\rho_{u,r}),$$

où R_u désigne l'ensemble des $r \in \mathcal{R}$ tels que $r_u = r$ (il s'agit de noter que $r \in R_u \Leftrightarrow ur = rt$ avec $t \in H$) et où $\rho_{u,r}$ est la restriction de ρ_u à $\rho_r(W)$.

Il reste alors à calculer $\text{tr}_{\rho_r(W)}(\rho_{u,r})$ pour tout $r \in R_u$.

Pour cela, on remarque que ρ_r définit un isomorphisme de W sur son image $\rho_r(W)$ et que l'on a $\rho_r \circ \theta_t = \rho_{u,r} \circ \rho_r$, où $t = r^{-1}ur \in H$.

Donc, $\text{tr}(\rho_{u,r}) = \text{tr}(\theta_t) = \chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$.

Ainsi $\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \chi_\theta(r^{-1}ur)$.

Cette dernière égalité, combinée avec le fait que tous les éléments g dans la classe à gauche rH avec $r \in R_u$ sont tels que $\chi_\theta(g^{-1}ug) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$, implique finalement :

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{g \in \mathcal{R} \text{ tq} \\ g^{-1}ug \in H}} \chi_\theta(g^{-1}ug).$$

Proposition 22 Pour $1 \leq i \leq 2$, on note χ_i le caractère de la représentation d'un sous-groupe H_i d'un groupe G_i .

On a alors

$$\text{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(\chi_1 \otimes \chi_2) = \text{Ind}_{H_1}^{G_1}(\chi_1) \otimes \text{Ind}_{H_2}^{G_2}(\chi_2).$$

Démonstration Pour $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2}(\chi_1 \otimes \chi_2) &= \frac{1}{|H_1 \times H_2|} \sum_{\substack{(h_1, h_2) \in G_1 \times G_2 \text{ tq} \\ h_i^{-1}g_i h_i \in H_i, 1 \leq i \leq 2}} (\chi_1 \otimes \chi_2)((h_1, h_2)^{-1}(g_1, g_2)(h_1, h_2)) \\ &= \frac{1}{|H_1 \times H_2|} \sum_{\substack{(h_1, h_2) \in G_1 \times G_2 \text{ tq} \\ h_i^{-1}g_i h_i \in H_i, 1 \leq i \leq 2}} \chi_1(h_1^{-1}g_1 h_1) \chi_2(h_2^{-1}g_2 h_2) \\ &= \left(\frac{1}{|H_1|} \sum_{\substack{h_1 \in G_1 \text{ tq} \\ h_1^{-1}g_1 h_1 \in H_1}} \chi_1(h_1^{-1}g_1 h_1) \right) \left(\frac{1}{|H_2|} \sum_{\substack{h_2 \in G_2 \text{ tq} \\ h_2^{-1}g_2 h_2 \in H_2}} \chi_2(h_2^{-1}g_2 h_2) \right) \\ &= \text{Ind}_{H_1}^{G_1}(\chi_1) \otimes \text{Ind}_{H_2}^{G_2}(\chi_2). \end{aligned}$$

On a toujours sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur G le produit scalaire $\langle f|g \rangle_G = \int_G f(t)\overline{g(t)}\mu_G(dt)$.

On note $\langle f|g \rangle_H = \int_H f(t)\overline{g(t)}\mu_G(dt)$ le produit scalaire sur tout sous-groupe de G .

Lemme 5 *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont les caractères de V_1 et V_2 , on a : $\langle \phi_1|\phi_2 \rangle_G = \dim \text{Hom}_G(V_1, V_2)$*

Démonstration Quitte à décomposer V_1 et V_2 en sommes directes de représentations irréductibles, on peut les supposer déjà irréductibles. Mais alors le lemme résulte directement des formules d'orthogonalité des caractères. \square

THÉORÈME 5.1 (FORMULE DE RÉCIPROCITÉ DE FROBENIUS) —

Si ψ est une fonction centrale sur H et ϕ une fonction centrale sur G , on a :

$$\langle \psi|\text{Res}_H^G \phi \rangle_H = \langle \text{Ind}_H^G(\psi)|\phi \rangle_G.$$

Démonstration Comme toute fonction centrale de carré intégrable est une combinaison linéaire de caractères d'après le théorème de Peter-Weyl, il suffit de démontrer le résultat pour ψ caractère d'un $\mathbb{C}[H]$ -module W et ϕ caractère d'un $\mathbb{C}[G]$ -module E .

Or l'isomorphisme $\text{Hom}_H(W, E) \simeq \text{Hom}_G(V, E)$ montré à la proposition 20 donne en particulier que les espaces vectoriels sont de même dimension. Le théorème résulte alors du lemme précédent. \square

6 Représentations du groupe symétrique

Dans cette section, on note \mathfrak{S}_n le groupe des permutations des entiers compris entre 1 et n . On souhaite déterminer ses caractères irréductibles ; pour cela, une introduction de l'anneau des polynômes symétriques et de ses propriétés sont nécessaires.

6.1 L'anneau des fonctions symétriques

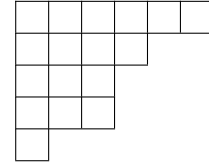
6.1.1 Notion de partition

Définition On appelle partition toute suite $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ décroissante presque nulle d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

Les entiers naturels $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont les parts. La longueur, notée $\ell(\lambda)$, désigne le nombre de parts non nulles et le poinds $|\lambda|$ la somme des parts.

Souvent, on écrira λ sous la forme d'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si $\forall i > n, \lambda_i = 0$ (les $\lambda_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ne sont pas forcément non nuls). On dira alors que la partition a n parts.

On peut représenter une partition par un diagramme de Ferrers. Ce dernier s'obtient en superposant de haut en bas des lignes dont les extrémités gauches sont alignées sur la première colonne et dont les longueurs sont données par les parts de la partition.



Par exemple, la partition $\lambda = (6, 4, 3, 3, 1)$ se représente sous la forme suivante :

Par symétrie diagonale du diagramme, on obtient le diagramme de Ferrers de la partition conjuguée notée λ^* . En reprenant l'exemple donné ci-dessus, on aurait ainsi $\lambda^* = (5, 4, 4, 2, 1, 1)$.

On munit l'ensemble des partitions de la relation d'ordre \prec définie de la manière suivante : si $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont deux partitions,

$$\lambda \prec \mu \text{ ssi } \begin{cases} |\lambda| = |\mu| \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \end{cases} .$$

Par exemple, on vérifie que $(6, 6, 2, 1, 1) \prec (7, 5, 2, 2)$.

6.1.2 Anneau des polynômes symétriques à n indéterminées

Soit n un entier naturel non nul, on définit une action du groupe \mathfrak{S}_n sur l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à coefficients entiers et à n indéterminées par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], \sigma \cdot P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

On définit alors l'ensemble Λ_n des polynômes symétriques à coefficients entiers et à n indéterminées comme étant l'ensemble des points fixes de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ sous l'action de \mathfrak{S}_n définie ci-dessus. Autrement dit, $\Lambda_n := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

On vérifie que Λ_n est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

6.1.3 Fonctions symétriques élémentaires

Considérons une partition λ à n parts et plaçons-nous dans Λ_n . On appelle monôme et on note X^λ l'expression $X_1^{\lambda_1} \dots X_n^{\lambda_n}$. On rappelle que le degré total du monôme X^λ est $|\lambda|$ et que le degré total d'un polynôme, noté encore deg , est le maximum des degrés totaux des monômes qui le constituent.

On appelle fonction symétrique monomiale tout polynôme de la forme suivante :

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n(\lambda)} X^\alpha,$$

où on note $\mathfrak{S}_n(\lambda)$ l'ensemble des n -uplets $(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$ lorsque σ décrit \mathfrak{S}_n .
Il est immédiat d'observer que ces fonctions sont des polynômes symétriques.

Remarque : On fera attention au fait qu'en général, $m_\lambda \neq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X^{\sigma(\lambda)}$ où $\sigma(\lambda)$ est le n -uplet $(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$.

En effet, dans cette dernière somme, on peut répéter des termes identiques (il est possible que $\sigma(\lambda) = \sigma'(\lambda)$ bien que σ et σ' soient deux permutations différentes). On voit cela par exemple avec la partition (211) et le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 .

Plus exactement, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une partition avec l valeurs ($l \leq n$) répétées k_1, \dots, k_l fois (c'est-à-dire $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1}, \lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}, \dots, \lambda_{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}+1} = \dots = \lambda_n$), le cardinal de $\mathfrak{S}_n(\lambda)$ est $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_l!}$.

Pour les partitions dont les parts non nulles sont égales à 1, les fonctions monomiales deviennent les fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k}$$

pour $1 \leq k \leq n$.

On pose par convention $e_0 = 1$.

Il y a ainsi $\binom{n}{k}$ termes qui interviennent dans la somme e_k .

En outre, si $n = 4$, on a :

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_1 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\ e_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4 \\ e_3 &= X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4 \\ e_4 &= X_1X_2X_3X_4 \end{aligned}$$

Pour chaque partition λ , on note $e_\lambda := \prod_{i=1}^n e_{\lambda_i}$.

THÉORÈME 6.1 (DIT FONDAMENTAL DES POLYNÔMES SYMÉTRIQUES) —

Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, les polynômes symétriques élémentaires e_λ , lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de longueur arbitraire, dont les parts sont inférieures ou égales à n , forment une base de l'anneau Λ_n .*

Autrement dit, pour tout polynôme symétrique P de n variables, il existe un unique polynôme Q à coefficients entiers et à n indéterminées tel que $P = Q(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration On raisonne par récurrence sur le nombre d'indéterminées n et à n fixé sur le degré total de P . Si $n = 1$, $P \in \mathbb{Z}[X]$ et le théorème est évident. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un polynôme de degré total 0 est constant, donc s'écrit de manière unique $P = ke_0$, $k \in \mathbb{Z}$ (ou encore on prend $Q := P$). L'initialisation est donc faite.

Supposons à présent le théorème vérifié pour tout polynôme de $n-1$ variables et pour tout polynôme de n variables de degré total égal à $m-1$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

Prenons P polynôme symétrique de n variables de degré total au plus m . On considère l'application :

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}, X_n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}] \\ f(X_1, \dots, X_n) &\longmapsto f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) \end{aligned}$$

ϕ est bien définie et est un homomorphisme d'anneaux.

Si $f(X_1, \dots, X_n) \in \Lambda_n$, en identifiant \mathfrak{S}_{n-1} au sous-groupe de \mathfrak{S}_n formé des permutations fixant n , il vient

$$\phi(f(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)) = f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) \in \Lambda_{n-1}.$$

Plus précisément, à toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$, on associe la permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ coïncidant avec σ sur $[1, n]$ et fixant n . Alors on obtient pour $f(X_1, \dots, X_n) \in \Lambda_n$,

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \phi(f) &= \sigma \cdot (f(X_1, \dots, X_{n-1}, 0)) \\ &= f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n-1)}, 0) \\ &= f(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(n-1)}, 0) \\ &= \phi(f(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(n-1)}, X_{\sigma'(n)})) \\ &= \phi(\sigma' \cdot f) \\ &= \phi(f) \end{aligned}$$

C'est exactement dire que ϕ transforme tout polynôme symétrique en un polynôme symétrique.

Par hypothèse de récurrence, il existe Q polynôme de $n-1$ variables tel que

$$\phi(P(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)) = Q(e_1(X_1, \dots, X_{n-1}), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1})).$$

Posons à présent $A(X_1, \dots, X_n) := Q(e_1(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n))$, où l'on note bien sûr encore par e_k le $k^{\text{ième}}$ polynôme symétrique élémentaire à n variables cette fois. Le polynôme A est symétrique en les n variables X_i et on a $\phi(P(X_1, \dots, X_n) - A(X_1, \dots, X_n)) = \phi(P(X_1, \dots, X_n)) - \phi(A(X_1, \dots, X_n)) = 0$. Donc $P - A \in \text{Ker } \phi = (X_n)$, c'est-à-dire $\exists R \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], P - A = RX_n$. En appliquant à cette dernière égalité une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(n) = i$, on voit par \mathfrak{S}_n -invariance de $P - A$ que X_i divise $P - A$. On a donc $e_n = X_1 \dots X_n$ divise $P - A$.

Enfin, P est de degré total inférieur ou égal à m , donc il est clair que $\deg \phi(P) \leq n$. Cela veut dire que le polynôme $Q(e_1(X_1, \dots, X_{n-1}), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}))$, élément de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}]$, est de degré total inférieur ou égal à m . Ensuite, $\deg(e_k(X_1, \dots, X_{n-1})) = \deg(e_k(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)) = k$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$ (cela se voit simplement sur la définition des polynômes symétriques élémentaires). En somme, $\deg(A) = \deg(Q(e_1(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n))) \leq m$.

De cela, il résulte que le quotient $(P - A)/e_n$ est de degré total inférieur à m . On peut donc écrire $P(X_1, \dots, X_n) - A(X_1, \dots, X_n) = S(X_1, \dots, X_n)e_n$ avec S de degré total inférieur à m . De plus S est symétrique car $P - A$ et e_n le sont.

Par hypothèse de récurrence, il existe un unique polynôme $B \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$S(X_1, \dots, X_n) = B(e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_n(X_1, \dots, X_n)).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(X_1, \dots, X_n) &= A(X_1, \dots, X_n) + S(X_1, \dots, X_n)e_n \\ &= Q(e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_{n-1}(X_1, \dots, X_n)) + B(e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_n(X_1, \dots, X_n))e_n(X_1, \dots, X_n) \\ &= C(e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_n(X_1, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

où $C(X_1, \dots, X_n) = Q(X_1, \dots, X_{n-1}) + B(X_1, \dots, X_n)X_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

Cela montre l'existence de la décomposition de P souhaitée.

Supposons à présent C' est un autre polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $P(X_1, \dots, X_n) = C'(e_1(X_1, \dots, X_n), \dots, e_n(X_1, \dots, X_n))$. Comme

$$\begin{aligned} (C'(e_1, \dots, e_n) - Q(e_1, \dots, e_{n-1}))/e_n &= (P(X_1, \dots, X_n) - A(X_1, \dots, X_n))/e_n \\ &= S(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

on a que $(C'(X_1, \dots, X_n) - Q(X_1, \dots, X_{n-1}))/X_n = B(X_1, \dots, X_n)$ puisque la décomposition de S par B est unique par hypothèse de récurrence. Ainsi $C'(X_1, \dots, X_n) = Q(X_1, \dots, X_{n-1}) + B(X_1, \dots, X_n)X_n = C(X_1, \dots, X_n)$, et l'unicité de la décomposition est montrée. \square

6.1.4 Fonctions symétriques complètes

On définit les fonctions symétriques complètes par

$$h_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k}.$$

Par exemple, si $n = 3$, $h_2 = X_1^2 + X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3 + X_3^2$ et si $n = 2$, $h_3 = X_1^3 + X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_2^3$.

Evidemment, les h_k appartiennent à Λ_n .

De la même manière que pour les fonctions symétriques élémentaires, on note $h_\lambda := \prod_{i=1}^n h_{\lambda_i}$.

Nous allons maintenant établir que les h_λ , lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de longueur arbitraire, dont les parts sont inférieures ou égales à n , forment une base de l'anneau Λ_n .

Nous commençons par le lemme suivant.

Lemme 6 Les séries formelles génératrices $E(t) := \sum_{k \geq 0} e_k t^k$ et $H(t) := \sum_{k \geq 0} h_k t^k$, éléments de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n][[t]]$, vérifient $E(t)H(-t) = 1$, soit encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^k (-1)^i e_i h_{k-i} = 0.$$

Démonstration En développant le produit $\prod_{i=1}^n (1 + tX_i)$, on voit que

$$E(t) = \prod_{i=1}^n (1 + tX_i).$$

On obtient également une formule pour $H(t)$: partons pour cela de $\prod_{i=1}^n (1 - tX_i)^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 - tX_i)^{-1} &= \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} X_i^k t^k \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} X_1^{k_1} t^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} X_2^{k_2} t^{k_2} \right) \dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} X_n^{k_n} t^{k_n} \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} t^{k_1+k_2+\dots+k_n} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k} t^k \\ &= H(t) \end{aligned}$$

Des deux formules obtenues pour $E(t)$ et $H(t)$, il vient en particulier $E(t)H(-t) = 1$. Cela donne en revenant aux formules de définition :

$$\left(\sum_{i \geq 0} e_i t^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} h_j (-1)^j t^j \right) = 1,$$

soit encore

$$\sum_{i, j \geq 0} e_i h_j (-1)^j t^{i+j} = 1.$$

On a ainsi

$$\sum_{h \geq 0} \left(\sum_{i+j=h} (-1)^j e_i h_j \right) t^h = 1,$$

donc immédiatement sur cette dernière écriture, on voit que :

$$\forall k \geq 1, \sum_{i+j=k} (-1)^j e_i h_j = 0.$$

D'où le résultat. □

Proposition 23 $\{h_\lambda \mid \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de Λ_n , ce qui se réécrit $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$.

Démonstration On a déjà vu que $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$. Il existe donc un endomorphisme d'anneau $\omega : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega(e_k) = h_k$. En fait, on va montrer que ω est un automorphisme involutif de l'anneau Λ_n ; la proposition à démontrer en découlera.

Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les relations obtenues au lemme précédent fournissent un système de n équations liant les h_k et les e_k pour $1 \leq k \leq n$. Ce système étant triangulaire après avoir remarqué que $e_0 = h_0 = 1$, on peut exprimer successivement pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, h_k en fonction de e_1, \dots, e_k . Donc pour tout k , il existe P_k à coefficients entiers tel que $h_k = P_k(e_1, \dots, e_k)$. Or, on observe que les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ jouent un rôle symétrique dans les relations obtenues au lemme précédent. Il en résulte que $e_k = P_k(h_1, \dots, h_k)$.

Ainsi,

$$\omega^2(e_k) = \omega(h_k) = \omega(P_k(e_1, \dots, e_k)) = P_k(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)) = P_k(h_1, \dots, h_k) = e_k.$$

Cela est valable pour tous les éléments e_k avec $1 \leq k \leq n$ (qui forment un système générateur de Λ_n), donc on a $\forall Q \in \Lambda_n, \omega^2(Q) = Q$. C'est ce que l'on voulait.

Les h_k , images des e_k par l'automorphisme ω , forment donc une base de Λ_n . □

6.1.5 Fonctions de Schur

On commence d'abord par quelques généralités sur les polynômes antisymétriques.

Définition On appelle polynôme antisymétrique P à coefficients entiers et à n indéterminées tout polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)P(X_1, \dots, X_n),$$

où ϵ désigne le morphisme signature.

Proposition 24 P est antisymétrique si et seulement si

$$\forall i < j, P(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = -P(X_1, \dots, \underset{i^{\text{ème place}}}{X_j}, \dots, \underset{j^{\text{ème place}}}{X_i}, \dots, X_n).$$

Démonstration – Supposons P antisymétrique.

Alors en appliquant la définition pour $\sigma = (ij)$, on a l'égalité voulue.

– Inversement, supposons que P vérifie $\forall i < j, P(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = -P(X_1, \dots, \underset{i^{\text{ème place}}}{X_j}, \dots, \underset{j^{\text{ème place}}}{X_i}, \dots, X_n)$.

On se donne une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Celle-ci se décompose en produit de transpositions et on a $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$, où N désigne le nombre de transpositions dans la décomposition de σ choisie.

En appliquant l'hypothèse à chaque transposition intervenant dans la décomposition, on obtient $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)P(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi P est antisymétrique. \square

A toute composition (n -uplet constitué d'entiers positifs ou nuls) $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, on associe le polynôme $a_\mu := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)X^{\sigma(\mu)}$.

Proposition 25 $a_\mu = \det(X_i^{\mu_j})_{1 \leq i, j \leq n}$. En particulier, a_μ est un polynôme antisymétrique, nul si μ a deux parts égales, et changé en son opposé si l'on permute deux parts.

Démonstration On a

$$\begin{aligned} \det(X_i^{\mu_j})_{1 \leq i, j \leq n} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_i^{\mu_{\sigma(i)}} \quad (\text{formule pour exprimer le déterminant}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(\mu)} \quad \text{car } \sigma(\mu) = (\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

La proposition montre qu'on peut se restreindre aux partitions strictement décroissantes, celles-ci s'écrivant $\lambda + \delta$, où λ est encore une partition et $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ la plus petite partition strictement décroissante à n parts.

Proposition 26 1. Le polynôme $V = \prod_{i < j} (X_i - X_j)$ est antisymétrique et est égal à a_δ .

2. V divise tout polynôme antisymétrique.

Démonstration 1. Il s'agit en fait de constater que V est égal à $\det(X_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n}$; V est un déterminant de Vandermonde.

2. Prenons P polynôme antisymétrique. Puisque les $X_i - X_j, i < j$ sont irréductibles et deux à deux premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, il suffit de montrer que pour tous $i < j, X_i - X_j$ divise P . On le montre pour $i = 1$ et $j = 2$, les autres cas étant analogues.

Réalisons la division euclidienne de P par $X_1 - X_2$ dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X_2, \dots, X_n][X_1]$ (possible car $X_1 - X_2$ a pour coefficient dominant 1 qui est inversible).

Ainsi, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{Z}[X_2, \dots, X_n][X_1])^2$ tel que $P = Q(X_1 - X_2) + R$, avec $\deg R < \deg(X_1 - X_2) = 1$. Alors $R \in \mathbb{Z}[X_2, \dots, X_n]$.

Mais alors en substituant X_2 à X_1 dans l'égalité

$$P(X_1, \dots, X_n) = Q(X_1, \dots, X_n)(X_1 - X_2) + R(X_2, \dots, X_n),$$

il vient, comme P est antisymétrique, $R = 0$. Ainsi $X_1 - X_2$ divise P . \square

Par conséquent, les fonctions de Schur, définies pour toute partition λ de longueur $\ell(\lambda) \leq n$ par $s_\lambda := \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, sont des polynômes symétriques et on a aussi la proposition suivante :

Proposition 27 *La multiplication par le polynôme $V = a_\delta$ définit une bijection Ψ de l'ensemble des polynômes symétriques sur l'ensemble des polynômes antisymétriques.*

Démonstration Ψ est bien définie car la multiplication d'un polynôme symétrique par un polynôme antisymétrique fournit un polynôme antisymétrique.

La bijectivité de Ψ est une conséquence de la proposition précédente. □

Les $a_{\lambda+\delta}$, lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de longueur inférieure ou égale à n , forment une base du \mathbb{Z} -module des polynômes antisymétriques.

Il en résulte aussitôt, au vu de la proposition précédente, que $\{s_\lambda | \ell(\lambda) \leq n\}$ est une base de Λ_n au sens où tout polynôme de Λ_n s'écrit comme une combinaison linéaire de s_λ pour $\ell(\lambda) \leq n$.

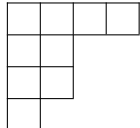
Remarque : On connaît des fonctions de Schur particulières.

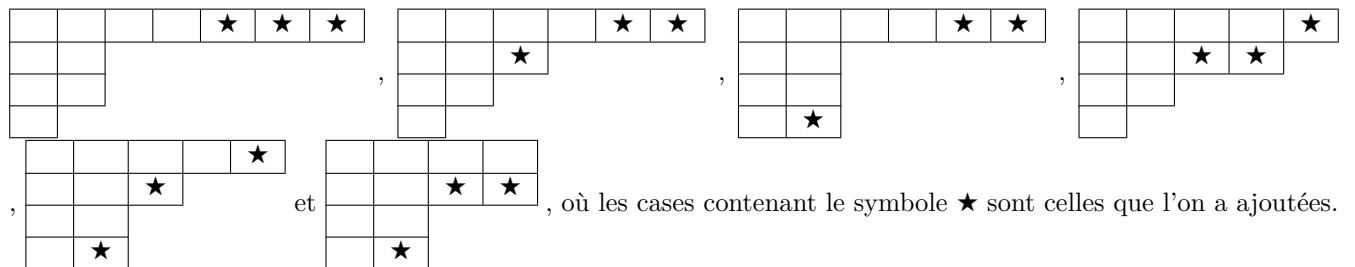
En effet, les fonctions symétriques complètes sont des fonctions de Schur : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, h_k = s_k$.

Les fonctions symétriques élémentaires en sont aussi : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, e_k = s_{1^{[k]}}$ où $1^{[k]}$ désigne la partition de poids k dont les parts non nulles valent 1 ; de manière plus explicite, $1^{[k]} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0$.

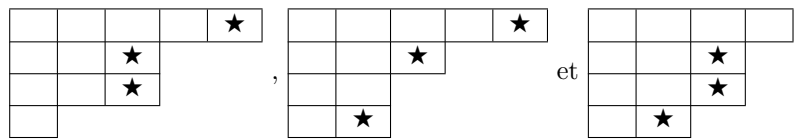
6.1.6 Formules de Pieri

Pour toute partition λ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\lambda \otimes k$ l'ensemble des partitions obtenues en ajoutant k cases à λ dont au plus une par colonne.

Exemple : avec $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ et $k = 3$. On part du diagramme  . Alors les partitions à $n = 4$ parts de $\lambda \otimes k$ correspondent aux tableaux suivants :



De même, on note $\lambda \otimes 1^{[k]}$ l'ensemble des partitions obtenues en ajoutant k cases à λ dont au plus une par ligne. En reprenant l'exemple précédent, l'ensemble $(4, 2, 2, 1) \otimes 1^{[3]}$ serait formé de :



Proposition 28 (Formules de Pieri) $s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^{[k]}} s_\mu$ et $s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu$.

Démonstration Calculons

$$\begin{aligned}
a_{\lambda+\delta}e_k &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(\lambda+\delta)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\epsilon(\sigma) X^{\sigma(\lambda+\delta)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{\sigma(i_1)} \dots X_{\sigma(i_k)} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(\lambda+\delta+\alpha_{(i_1, \dots, i_k)})} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{\lambda+\delta+\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}} \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=k}} a_{\lambda+\delta+\alpha}
\end{aligned}$$

où on a noté par $\alpha_{(i_1, \dots, i_k)}$ la composition $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où $\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Or, par définition de δ et comme $a_{\lambda+\delta+\alpha}$ est antisymétrique, on a $a_{\lambda+\delta+\alpha} \neq 0 \iff \lambda + \alpha$ est une partition. Autrement dit, $s_{\lambda+\alpha} \neq 0$ si et seulement si $\lambda + \alpha$ est une partition; la somme porte donc sur l'ensemble des partitions obtenues en ajoutant 1 dans k composantes de la partition λ . Ainsi, la somme porte sur $\lambda + \alpha \in \lambda \otimes 1^{[k]}$.

Il résulte donc en divisant l'égalité par a_δ :

$$s_\lambda e_k = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=k}} s_{\lambda+\alpha} = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^{[k]}} s_\mu.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
a_{\lambda+\delta}h_k &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} a_{\lambda+\delta+\alpha} \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha + \lambda \in \lambda \otimes k}} a_{\lambda+\delta+\alpha} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha + \lambda \notin \lambda \otimes k}} a_{\lambda+\delta+\alpha}.
\end{aligned}$$

Or, si $\alpha + \lambda \notin \lambda \otimes k$, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i + 1 \leq \lambda_{i+1} + \alpha_{i+1}$. En effet,

- si $\lambda + \alpha$ n'est pas une partition, alors $\exists i$, $\lambda_i + \alpha_i < \lambda_{i+1} + \alpha_{i+1}$, avec $\alpha_i \geq 0$. L'inégalité stricte devient large comme écrite précédemment parce qu'on a affaire à des entiers.
- si $\lambda + \alpha$ est une partition, alors il existe un indice i tel que dans la colonne $\lambda_i + 1$ du tableau de Ferrers, il y ait au moins deux cases ajoutées, précisément aux lignes i et $i + 1$.

On choisit l'indice i maximum vérifiant cette inégalité et on définit alors le n -uplet β par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_j = \begin{cases} \alpha_{i+1} - (\lambda_i + 1 - \lambda_{i+1}) & \text{si } j = i \\ \alpha_i + (\lambda_i + 1 - \lambda_{i+1}) & \text{si } j = i + 1 \\ \alpha_j & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application $\alpha \mapsto \beta$ définit une involution de l'ensemble $\{\alpha \mid \alpha + \lambda \notin \lambda \otimes k\}$ sur lui-même et, de plus, on a la relation $a_{\lambda+\alpha+\delta} = -a_{\lambda+\beta+\delta}$.

Les termes de la deuxième somme du dernier calcul s'annulent donc deux à deux. La formule annoncée dans la proposition en découle. \square

Exemple : Il découle des formules de Pieri et de l'exemple précédent que, pour $n = 4$,

$$s_{(4,2,2,1)}h_3 = s_{(7,2,2,1)} + s_{(6,2,2,2)} + s_{(6,3,2,1)} + s_{(5,4,2,1)} + s_{(5,3,2,2)} + s_{(4,4,2,2)}.$$

Application : décomposition sur les fonctions de Schur Le but de ce paragraphe est de voir comment il est possible de décomposer les monômes en les fonctions symétriques élémentaires et complètes sur les fonctions de Schur.

On introduit pour cela la notion de tableaux semistandard et standard.

On sait qu'à toute partition λ est associé un diagramme de Ferrers. Les formules de Pieri s'interprètent de la manière suivante : pour calculer les produits $s_\lambda e_k$ (ou $s_\lambda h_k$), on ajoute des bandes verticales (respectivement horizontales).

Définition On appelle *tableau semistandard* (ou de Young) T la donnée d'un diagramme de Ferrers rempli par des entiers naturels de manière croissante dans les lignes et strictement croissante dans les colonnes.

La forme $\lambda(T)$ du tableau T est celle du diagramme de Ferrers associé à la partition λ .

Le poids $\mu(T)$ de T est la suite constituée des nombres d'apparition dans T des entiers naturels successifs. Autrement dit, pour $\mu(T)_i$ est le nombre d'entiers égaux à i .

Un tableau semistandard numéroté par les entiers successifs, chacun n'apparaissant qu'une seule fois, c'est-à-dire de poids $(1, \dots, 1)$ est dit standard.

Exemple : Le tableau semistandard

1	1	1	3	4
2	2			
3	4			
4				
5				

 est de forme la partition $(5, 2, 2, 1, 1)$ et de poids

$(3, 2, 2, 3, 1)$.

Le tableau standard suivant, de poids $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, est de même forme :

1	2	3	7	8
4	5			
6	10			
9				
11				

Evidemment, on comprend qu'il n'existe pas un seul tableau semistandard ou standard de forme et poids donnés. En outre, le tableau semistandard suivant est associé à la même partition λ et a le même poids que le tableau

semistandard précédent.

1	1	1	2	4
2	3			
3	4			
4				
5				

Définition On appelle nombre de Kostka et on note $K_{\lambda, \mu}$ le nombre de tableaux semistandards de forme λ et de poids μ .

Remarquons que pour toute partition λ , $K_{\lambda, \lambda} = 1$. En effet, on montre qu'un tableau semistandard T de forme λ et de poids λ est uniquement déterminé : on suppose $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Par définition du poids, il y a λ_i entiers égaux à i . La première ligne de T est constituée de λ_1 éléments (car T est de forme λ). Si cette ligne ne contenait pas tous les entiers égaux à 1, il y aurait au moins un entier égal à 1 qui se trouverait dans une ligne en-dessous de la première ; cela contredirait la définition d'un tableau semistandard.

Ainsi, tous les 1 sont situés sur la première ligne. De plus, comme il y a exactement λ_1 entiers égaux à 1 à placer (par définition du poids), la première ligne de T ne contient que des 1.

On montre alors par le même raisonnement que la deuxième ligne est exactement constituée des λ_2 entiers égaux à 2. De proche en proche, on montre donc que la ligne i du tableau T contient les λ_i entiers égaux à i .

On voit donc que le tableau T est uniquement déterminé.

De plus, on s'aperçoit du fait que $K_{\lambda, \mu} > 0$ si et seulement si $\mu \prec \lambda$.

La proposition suivante permet de décomposer les monômes en les fonctions symétriques complètes et élémentaires sur les fonctions de Schur.

Proposition 29 Pour toute partition μ , on a $h_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_\lambda$ et $e_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_{\lambda^*}$.

Démonstration On ne traitera que le cas des h_k .

On raisonne par récurrence sur la longueur de μ .

Si $\mu = (k)$, $h_\mu = h_k = s_k$. De plus, un tableau semistandard de poids (k) ne peut être formé qu'en disposant k cases sur une seule ligne, comprenant chacune un 1 ; la partition associée est alors aussi (k) . Donc $K_{\lambda, (k)} = 1$ si $\lambda = k$ et 0 sinon.

Ainsi $\sum_{\lambda} K_{\lambda, (k)} s_\lambda = K_{(k), (k)} s_k = s_k = h_\mu$.

Supposons le résultat établi pour les partitions de longueur inférieure ou égale à $n - 1$. Prenons $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une partition de longueur n et notons μ' la partition $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$

On a

$$\begin{aligned}
h_\mu &= h_{\mu_1} \dots h_{\mu_{n-1}} h_{\mu_n} \\
&= h_{\mu'} h_{\mu_n} \\
&= \left(\sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu'} s_\lambda \right) h_{\mu_n} \\
&= \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu'} (s_\lambda h_{\mu_n}) \\
&= \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu'} \left(\sum_{\lambda' \in \lambda \otimes \mu_n} s_{\lambda'} \right) \\
&= \sum_{\lambda'} K_{\lambda', \mu'} s_{\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda \in \lambda' \otimes \mu_n} \sum_{\lambda' \text{ tel que } \lambda \in \lambda' \otimes \mu_n} K_{\lambda', \mu'} s_{\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_\lambda,
\end{aligned}$$

le passage de la pénultième ligne à la dernière ligne provenant du fait qu'il est possible de construire un tableau semistandard de proche en proche, en rajoutant à la $k^{\text{ième}}$ étape μ_k entiers égaux à k , dont au plus un par colonne. A un tableau semistandard donné correspond donc une suite de tableaux semistandard obtenue de cette manière et réciproquement, une telle suite détermine un certain tableau semistandard. (On a donc une bijection entre l'ensemble des tableaux semistandard de forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et de poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et l'ensemble des tableaux obtenus à partir de tableaux semistandard de poids $\mu' = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ auxquels on a rajouté μ_n entiers égaux à n formant un tableau de forme λ .)

Note : La proposition précédente est encore valable pour les compositions.

Puisqu'à une composition μ , on avait associé un monôme X^μ , un tableau semistandard de poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ contient la donnée d'un monôme $X^\mu = X_1^{\mu_1} \dots X_k^{\mu_k}$.

6.1.7 Correspondance de Robinson-Schensted-Knuth et applications

Dans ce paragraphe, on définit la correspondance de Knuth qui nous sera très pratique dans la suite.

Principe de la correspondance de Knuth La correspondance de Knuth consiste en une bijection entre matrices presque nulles à coefficients entiers positifs et paires de tableaux semistandard de même forme.

Il s'agit de prouver l'existence d'une telle bijection ; la démonstration donne en plus une méthode systématique pour passer d'une matrice A décrite ci-dessus à une paire de tableaux semistandard (T, S) et vice-versa.

Partons d'une matrice A que l'on peut supposer de taille $n \times n$. On note $a_{i,j}$ ses coefficients.

On associe à la matrice A un bimot (ou table à deux lignes)

$$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

tel que

– pour chaque paire d'indices (i, j) de la matrice A , il y a $a_{i,j}$ colonnes égales à $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$.

– les colonnes de type $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ sont ordonnées selon l'ordre lexicographique suivant :

$\begin{cases} i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \\ \text{si } i_r = i_s \text{ avec } r \leq s, \text{ alors } j_r \leq j_s. \end{cases}$. On dit que la première ligne est ordonnée de façon croissante et la deuxième ligne de façon compatible avec la première.

A partir de ce bimot, on applique l'algorithme ci-après, dit d'insertion de Schensted, qui produit une suite de m paires de tableaux (T_k, Q_k) ($k \in \llbracket 1, m \rrbracket$), où les T_k sont des tableaux semistandard et les Q_k des tableaux standards. Plus précisément, $T := T_m$ sera formé de m cases qui contiennent chacune un élément j_k , $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ (un élément de la seconde ligne du bimot) tandis que $Q := Q_m$, contenant m cases numérotées de 1 à m , va enregistrer les formes successives obtenues lors de la construction de T .

1. L'algorithme commence avec un tableau vide. On convient alors que T_1 est le tableau réduit à une seule case contenant l'entier positif j_1 . Le deuxième tableau Q_1 est réduit à une seule case contenant 1.
2. On suppose avoir construit les paires de tableaux $(T_1, Q_1), \dots, (T_k, Q_k)$ pour un certain $k < m$; les tableaux T_i , $1 \leq i \leq k$ étant semistandard constitués de cases contenant les j_1, \dots, j_i . On construit alors T_{k+1} à partir de T_k et de l'entier j_{k+1} de la manière qui suit. On considère d'abord la première ligne de T_k .
 - Si n'y figurent que des entiers inférieurs ou égaux à j_{k+1} , on place une nouvelle case contenant j_{k+1} à la droite de cette ligne et on s'en tient là : T_{k+1} est construit.
 - Sinon, on considère la case de cette première ligne de T_k , située le plus à gauche parmi celles qui sont numérotées d'entiers strictement supérieurs à j_{k+1} . On y fait alors figurer l'entier j_{k+1} à la place de l'entier p qui s'y trouve puis on passe à la ligne suivante avec cet entier p . On réeffectue l'opération avec l'entier p , jusqu'à ce que le procédé s'arrête (il s'arrête bien puisque le nombre de lignes de T_k est fini). On obtient ainsi un nouveau tableau T_{k+1} qui est semistandard par construction. Notons que la forme de T_{k+1} est celle de T_k adjointe d'une nouvelle case.
 Le tableau Q_{k+1} est alors obtenu à partir de Q_k en rajoutant une case numérotée par l'entier $k+1$ exactement à l'endroit qui a permis de passer de la forme de T_k à la forme de T_{k+1} . Il est clair que le tableau Q_{k+1} est standard.
3. L'algorithme s'arrête une fois que la paire (T_m, Q_m) a été construite. On pose alors $T := T_m$ et $Q := Q_m$.

Enfin, on transforme Q en un tableau semistandard S en remplaçant chaque entrée h de Q par la $h^{\text{ième}}$ entrée de la première ligne de w_A .

En quelque sorte, T est obtenu à partir de la deuxième ligne et S est obtenu à partir de la première ligne de w_A . De plus, le nombre de coefficients de T égaux à j est par construction égal à la somme des coefficients appartenant à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A de départ. Le nombre de coefficients de Q égaux à i correspond à la somme des coefficients appartenant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A .

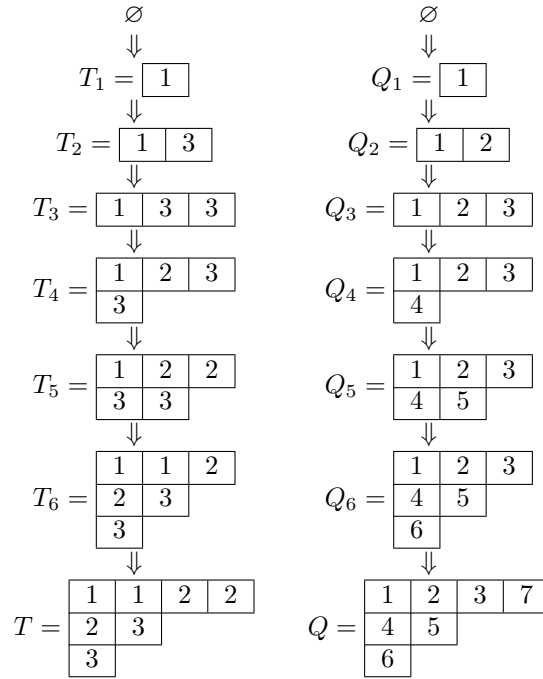
On illustre à présent ce procédé de passage de matrice à paire de tableaux semistandard.

Partons par exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On forme le bimot w_A associé "en balayant A ligne après

ligne, de gauche à droite et en insérant $a_{i,j}$ fois $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ "; on obtient :

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Construisons à présent la suite de paires de tableaux (T_k, Q_k) .



Finalement, on obtient $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 3 & & & \end{array}$ et $S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \end{array}$.

Réciproquement, si on se donne deux tableaux semistandard T et S de même forme, on va pouvoir construire une matrice à coefficients entiers positifs A .

Considérons de tels T et S . Notons l le nombre de cases de T (c'est aussi le nombre de cases de S). Soit s_l la plus grande entrée de T .

On supprime parmi les cases numérotées par l'entier s_l celle qui se trouve la plus à droite (il y en a bien une seule qui se trouve la plus à droite car un tableau semistandard doit être par définition rempli de façon strictement croissante dans les colonnes).

On chasse la case correspondante (c'est-à-dire située "au même endroit") de T par le procédé inverse de l'insertion de Schensted ; cela prive le tableau T d'un entier noté t_l .

En itérant ce procédé, on obtient deux suites d'entiers : $s = (s_1, \dots, s_l)$ et $t = (t_1, \dots, t_l)$ avec $s_1 \leq \dots \leq s_l$ et $t_k \leq t_{k+1}$ si $s_k = s_{k+1}$.

On est ainsi en possession de couples (s_i, t_i) , $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ formant un bimot, donc on peut former ainsi une matrice

$A := \sum_{i=1}^l E_{s_i, t_i}$ où $E_{m,n}$ est la matrice dont toutes les composantes sont nulles sauf celle de la ligne m et de la colonne n qui vaut 1.

A nouveau, illustrons ce procédé à partir de $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$ et $S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$.

On a $s_9 = 4$. Il vient de proche en proche :

Suite de transformations de T	Élément supprimé	Suite de transformations de Q	Élément supprimé
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$t_9 = 1$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$s_9 = 4$
↓	↓	↓	↓
$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$	$t_8 = 1$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$	$s_8 = 4$
↓	↓	↓	↓
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	$t_7 = 4$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	$s_7 = 3$
↓	↓	↓	↓
...
↓	↓	↓	↓
$\begin{array}{ c c } \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}$	$t_3 = 1$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$	$s_3 = 2$
↓	↓	↓	↓
$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$t_2 = 4$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$s_2 = 1$
↓	↓	↓	↓
\emptyset	$t_1 = 4$	\emptyset	$s_1 = 1$

Au final, on obtient $s = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$ et $t = (4, 4, 1, 2, 3, 2, 4, 1, 1)$. Le bimot $\binom{s}{t}$ fournit alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Application de la correspondance de Knuth : nouvelle expression des fonctions de Schur

THÉORÈME 6.2 (DE LITTLEWOOD) —

Pour toute partition λ , on a $s_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} X^{\mu(T)}$ où \mathcal{T}_λ désigne l'ensemble des tableaux semistandard de forme λ .

Démonstration On note $t_\lambda := \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} X^{\mu(T)}$. On va démontrer que $s_\lambda = t_\lambda$ en écrivant les décompositions de h_μ (pour une partition donnée $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$) sur les t_λ et les s_λ .

$$\begin{aligned} h_\mu &= h_{\mu_1} \dots h_{\mu_m} \\ &= \left(\sum_{1 \leq i_{1,1} \leq \dots \leq i_{1,\mu_1} \leq n} X_{i_{1,1}} \dots X_{i_{1,\mu_1}} \right) \dots \left(\sum_{1 \leq i_{m,1} \leq \dots \leq i_{m,\mu_m} \leq n} X_{i_{m,1}} \dots X_{i_{m,\mu_m}} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_{1,1} \leq \dots \leq i_{1,\mu_1} \leq n \\ \dots \\ 1 \leq i_{m,1} \leq \dots \leq i_{m,\mu_m} \leq n}} X_{i_{1,1}} \dots X_{i_{1,\mu_1}} \dots X_{i_{m,1}} \dots X_{i_{m,\mu_m}} \\ &= \sum_{\substack{(a_{k,l})_{1 \leq k \leq m} \\ 1 \leq l \leq n}} X_1^{a_{1,1} + \dots + a_{m,1}} \dots X_m^{a_{1,n} + \dots + a_{m,n}}, \end{aligned}$$

où on a noté par $(a_{k,l})$ une matrice de taille $m \times n$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{k,j} = \mu_k$.

Or, via la correspondance de Knuth, ces sommes des composantes de $(a_{k,l})$ correspondent aux composantes du poids d'un tableau semistandard Q tandis que les sommes des composantes de $(a_{k,l})$ sur les colonnes correspondent au poids d'un tableau semistandard T . De façon plus explicite, pour chaque matrice $(a_{k,l})$, il existe une unique paire $\{T, Q\}$ de tableaux semistandards tels que $\mu(T) = \left(\sum_{i=1}^m a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} \right)$ et $\mu(Q) = \mu = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} \right)$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} h_\mu &= \sum_{\substack{T \text{ et } Q \text{ semistandards} \\ \text{tq } \lambda(Q) = \lambda(T) \text{ et } \mu(Q) = \mu}} X^{\mu(T)} \\ &= \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} X^{\mu(T)} \\ &= \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} t_\lambda. \end{aligned}$$

Or, on avait déjà d'après la proposition 29 que $h_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_\lambda$.

On observe donc que h_μ a même développement sur les s_λ et les t_λ .

Finalement, comme le développement des h_μ sur les fonctions de Schur est inversible puisque $(h_\mu)_\mu$ et $(s_\lambda)_\lambda$ forment des bases de Λ_n , il résulte que $s_\lambda = t_\lambda$. \square

Autre application de Knuth : la formule de Cauchy On considère dans ce paragraphe $\{X_1, \dots, X_n\}$ et $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ deux ensembles de variables indépendantes.

Proposition 30 (Formule de Cauchy) $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \text{ avec } \ell(\lambda) \leq n} s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \prod_{i,j} \sum_{k \geq 0} (X_i Y_j)^k \\ &= \sum_{(a_{i,j}) \in \mathcal{M}} \prod_{i,j} (X_i Y_j)^{a_{i,j}} \\ &= \sum_{(a_{i,j}) \in \mathcal{M}} \prod_{i,j} X_i^{a_{i,j}} Y_j^{a_{i,j}}, \end{aligned}$$

où \mathcal{M} désigne l'ensemble des matrices à coefficients entiers possédant au plus n lignes et n colonnes (car i et j sont des indices portés par les éléments des ensembles $\{X_1, \dots, X_n\}$ et $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ de cardinal n).

A chaque matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}$, on peut donc associer via la correspondance de Knuth une paire T, Q de tableaux semistandards de même forme et de poids donnés par les sommes des coefficients sur les lignes et sur les colonnes. Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \sum_{(a_{i,j}) \in \mathcal{M}} \prod_i X_i^{\sum_j a_{i,j}} \prod_j Y_j^{\sum_i a_{i,j}} \\ &= \sum_{\lambda(T) = \lambda(Q)} X^{\mu(T)} Y^{\mu(Q)} \\ &= \sum_{\lambda \text{ avec } \ell(\lambda) \leq n} \sum_{T, Q \in \mathcal{T}_\lambda} X^{\mu(T)} Y^{\mu(Q)} \\ &= \sum_{\lambda \text{ avec } \ell(\lambda) \leq n} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} X^{\mu(T)} \right) \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_\lambda} Y^{\mu(Q)} \right) \\ &= \sum_{\lambda \text{ avec } \ell(\lambda) \leq n} s_\lambda(X) s_\lambda(Y), \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du théorème de Littlewood. \square

6.1.8 Les sommes de Newton

Définition On définit les sommes de Newton (ou encore de puissances) de n variables par $\forall k > 0, p_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$ et pour $k = 0, p_k = 1$.

Il est clair que les p_k sont des fonctions symétriques et comme d'habitude, on notera $p_\lambda = p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_m}$ pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

On veut établir des relations liant les sommes de Newton aux fonctions symétriques élémentaires et complètes. On travaille pour cela avec la série formelle génératrice $P(t) = \sum_{k \geq 0} p_{k+1} t^k$, élément de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n][[t]]$.

Proposition 31 $P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}$ et $P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$, où $H(t)$ et $E(t)$ étaient définies au lemme 6.

Démonstration De manière formelle,

$$\begin{aligned} \ln H(t) &\stackrel{\text{lemme 6}}{=} \ln \left(\prod_{i=1}^n (1 - tX_i)^{-1} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \ln(1 - tX_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{(tX_i)^k}{k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k} \sum_{i=1}^n X_i^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{p_k t^k}{k} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{p_{k+1} t^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Donc par dérivation formelle par rapport à t ,

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = P(t).$$

Pour montrer la seconde égalité, on peut refaire le même calcul avec $E(t)$ ou bien utiliser $\frac{H'(t)}{H(t)} = P(t)$ et l'égalité $E(t)H(-t) = 1$ démontrée au lemme 6. Car alors par dérivation selon t , il vient $E'(t)H(-t) - E(t)H'(-t) = 0$; le résultat en découle aussitôt. \square

Ces identités conduisent aux formules de Newton suivantes.

Proposition 32 Pour tout $k \geq 0$, on a $(k+1)h_{k+1} = \sum_{i+j=k} p_{j+1}h_i$ et $(k+1)e_{k+1} = \sum_{i+j=k} (-1)^{j-1} p_{j+1}e_i$.

Démonstration On choisit de ne démontrer que la première égalité, la démonstration de la deuxième égalité étant analogue.

On part de l'égalité $P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}$ de la proposition précédente. Cela donne tout de suite

$$\sum_{k \geq 0} p_{k+1} t^k = \frac{\sum_{k \geq 0} (k+1)h_{k+1} t^k}{\sum_{k \geq 0} h_k t^k}.$$

D'où :

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} p_{k+1} h_i t^{k+i} = \sum_{k \geq 0} (k+1)h_{k+1} t^k.$$

Autrement dit,

$$\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i+k=j} p_{k+1} h_i \right) t^j = \sum_{k \geq 0} (k+1)h_{k+1} t^k.$$

Ainsi pour tout $k \geq 0$,

$$\sum_{i+j=k} p_{j+1} h_i = (k+1)h_{k+1}.$$

en identifiant terme à terme les coefficients des séries formelles en t . \square

On pose à présent pour toute partition λ ,

$$z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! \in \mathbb{N}^*,$$

où $m_i(\lambda)$ désigne le nombre de composantes de λ égales à l'entier i . Les formules de Newton s'inversent de la manière suivante.

Proposition 33 $h_k = \sum_{|\lambda|=k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$ et $e_k = \sum_{|\lambda|=k} (-1)^{|\lambda|+\ell(\lambda)} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$.

Démonstration On utilise là encore les séries formelles génératrices $H(t)$ et $E(t)$.

D'après la démonstration de la proposition 31, $H(t) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k t^k}{k}\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} H(t) &= \prod_{k \geq 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p_k^m t^{km}}{m! k^m} \\ &= \sum_{(m_i)_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}} \prod_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{m_i!} \left(\frac{p_i t^i}{i}\right). \end{aligned}$$

Il résulte

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k t^k &= \sum_{k \geq 0} \sum_{(m_i)_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}} \sum_{\text{tq } \sum_i i \cdot m_i = k} \frac{\prod_i p_i^{m_i}}{\prod_i (i^{m_i} m_i!)} t^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{|\lambda|=k} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \right) t^k. \end{aligned}$$

La première formule de la proposition en découle en identifiant terme à terme.

De même, en utilisant $E(t) = H(-t)^{-1} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} p_k \frac{(-t)^{k-1}}{k}\right)$, on établit la seconde formule. □

Proposition 34 Les fonctions p_λ lorsque λ décrit l'ensemble des partitions dont toutes les parts sont de longueur inférieure ou égale à n forment une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Démonstration Les formules de Newton liant les fonctions symétriques complètes aux sommes de puissances, écrites pour k allant de 0 à $n-1$ conduisent au système suivant :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ p_1 & -2 & 0 & & \vdots \\ p_2 & p_1 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 & -n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -p_n \end{bmatrix}$$

Ce système étant de Cramer, on peut exprimer pour tout $k \geq 1$ h_k comme le produit de $\frac{1}{n!}$ et d'un polynôme à coefficients entiers en les sommes de puissances p_i , pour $1 \leq i \leq k$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists P_k \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n], h_k = P_k(p_1, \dots, p_n)$. Puisque les h_k forment une base algébrique de Λ_n (tout polynôme de Λ_n s'écrit comme polynôme à coefficients entiers en les h_k), on voit ainsi que les p_k forment un système générateur de $\Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

La liberté de la famille des (p_λ) , lorsque λ décrit l'ensemble des partitions dont toutes les parts sont inférieures ou égales

à n , se montre en écrivant une combinaison \mathbb{Q} -linéaire nulle d'un nombre fini de tels p_λ (disons $\sum_{i=1}^N q_i p_{\lambda_i} = 0$ où les

λ_i désignent ici des partitions et les q_i des rationnels), puis en raisonnant comme suit. On regarde $\sum_{i=1}^N q_i p_{\lambda_i}$ comme

un élément de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$; grâce à un argument de degré (en X_n), cela donne $\deg_{X_n} \left(\sum_{i=1}^N q_i p_{\lambda_i} \right) + 1$ nouvelles

équations (éventuellement $0 = 0$), ne faisant intervenir plus que X_1, \dots, X_{n-1} . On poursuit en considérant ces égalités dans $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{n-2}][X_{n-1}]$, etc. Finalement, on obtient que tous les q_i valent 0.

D'où le résultat. □

On termine ce paragraphe par la formule suivante.

$$\textbf{Proposition 35} \quad \prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}(X) p_{\lambda}(Y)}{z_{\lambda}}$$

Démonstration On part de $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \exp \left(- \sum_{i,j} \ln(1 - X_i Y_j) \right)$. Le reste de la démonstration fait intervenir le même type d'enchaînements que les calculs de la proposition 33. \square

6.1.9 Construction de l'anneau des fonctions symétriques

Dans ce paragraphe, on veut construire un anneau de fonctions symétriques en un nombre infini (dénombrable) d'indéterminées ; cela permettra notamment de ne plus se limiter à des partitions de longueur finie.

On note Λ_n^k l'ensemble constitué du polynôme nul et des polynômes symétriques de n variables homogènes de degré k à coefficients entiers.

Pour tout $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$, on considère les applications de restriction suivantes :

$$r_{n,m}^k : \begin{array}{ccc} \Lambda_m^k & \rightarrow & \Lambda_n^k \\ P(X_1, \dots, X_n, \dots, X_m) & \mapsto & P(X_1, \dots, X_n, 0, \dots, 0) \end{array}$$

On convient $\forall n \in \mathbb{N}, r_{n,n}^k := \text{Id}_{\Lambda_n^k}$. Il est clair que $\forall n < m < p, r_{n,m}^k \circ r_{m,p}^k = r_{n,p}^k$.

On est donc en la possession d'un système projectif $(\Lambda_n^k, r_{n,m}^k)_{n,m \in \mathbb{N}}$.

Définition On définit $\Lambda^k := \{(P_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \forall n \leq m, r_{n,m}(P_m) = P_n\} \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^k$.

Proposition 36 Muni de l'ensemble des projections $\psi_n : \Lambda^k \rightarrow \Lambda_n^k$, l'ensemble Λ^k est la limite projective des Λ_n^k . De plus, en tant que limite projective de \mathbb{Z} -modules, Λ^k est aussi un \mathbb{Z} -module.

Démonstration D'une part, $\forall n \leq m, \psi_n = r_{n,m} \circ \psi_m$.

D'autre part, la propriété universelle suivante est satisfaite.

Pour tout ensemble Ω et toute famille d'applications $(\omega_n : \Omega \rightarrow \Lambda_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \leq m, \omega_n = r_{n,m} \circ \omega_m$, il existe une unique application $\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^k$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = \psi_n \circ \omega$.

En effet, si les hypothèses de cette propriété universelle sont satisfaites, on pose

$$\omega : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Lambda^k \\ x & \mapsto & (\omega_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Cette application est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \psi_n \circ \omega(x) = \omega_n(x)$.

Si $\omega' : \Omega \rightarrow \Lambda^k$ vérifie aussi $\forall n, \psi_n \circ \omega' = \omega_n$, alors $\forall n, \psi_n(\omega - \omega') = 0$. Si $x \in \Omega, (\omega - \omega')(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$.

Cela implique $\forall n, x_n = \psi_n((\omega - \omega')(x)) = 0$ puis $(\omega - \omega')(x) = 0$ et enfin $\omega = \omega'$.

D'où on a bien $\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$. \square

Remarque : Plus concrètement, on peut donc voir Λ^k comme l'ensemble constitué de 0 et des séries formelles en une famille dénombrable d'indéterminées $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, symétriques et homogènes de degré k .

Remarque : Si λ partition de poids $|\lambda| = k$, $r_{n,n+1}^k(s_{\lambda}) = s_{\lambda}$ si $\ell(\lambda) \leq n$ et $r_{n,n+1}^k(s_{\lambda}) = 0$ sinon. Cela se voit par exemple sur la formule de définition des s_{λ} avec les déterminants.

En particulier, pour $n \geq k$, on a $\ell(\lambda) \leq |\lambda| = k \leq n$, donc $r_{n,n+1}^k$ est une bijection.

La limite projective Λ^k admet donc pour base une famille de polynômes que l'on notera encore s_{λ} , indexée par l'ensemble fini des partitions λ de poids k . Ces éléments se spécialisent dans Λ_n^k sur les fonctions de Schur de n variables.

Définition On définit le \mathbb{Z} -module des fonctions symétriques en une famille dénombrable d'indéterminées par la somme directe de \mathbb{Z} -modules $\Lambda := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$.

Proposition 37 L'ensemble Λ des fonctions symétriques en une famille dénombrable de variables admet une structure d'anneau gradué.

Démonstration La multiplication interne dans Λ est simplement le prolongement de la multiplication interne dans les anneaux de polynômes en un nombre fini d'indéterminées. Les propriétés d'associativité et de distributivité découlent aussi du cas d'un nombre fini de variables. L'élément unité est encore 1 ($\in \Lambda^0$). Cela fait de Λ un anneau. La structure d'anneau gradué vient de la décomposition en somme directe de \mathbb{Z} -modules et de ceci que $\forall k, l \in \mathbb{N}, \Lambda^k \cdot \Lambda^l \subset \Lambda^{k+l}$ par définition des Λ^k . \square

Remarque : Les propriétés démontrées dans Λ_n sont valables dans Λ . Par exemple, $\{e_\lambda | \lambda \text{ partition}\}$ est une base de Λ , au sens où tout élément de Λ s'écrit comme un polynôme en les e_k où $k \in \mathbb{N}$. De même que ω_n est un automorphisme involutif de Λ_n , on a un automorphisme involutif ω de Λ échangeant e_k et h_k pour tout k . On a aussi $\omega(p_k) = (-1)^{k+1}p_k$ et comme conséquence de la proposition 29 $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^*}$.

6.1.10 Produit scalaire sur l'anneau des fonctions symétriques Λ

On définit un produit scalaire \langle, \rangle sur Λ en décrétant que les fonctions de Schur s_λ , où λ désigne une partition quelconque, sont orthonormales pour ce produit scalaire. Cela a bien un sens puisque les fonctions de Schur s_λ forment une base de Λ .

On établit maintenant des relations reliant différentes bases de Λ via ce produit scalaire. On commence par le lemme suivant.

Lemme 7 Si $(a_\lambda)_\lambda$ et $(b_\lambda)_\lambda$ sont deux familles de fonctions symétriques homogènes de degré $|\lambda|$ indexées par les partitions et telles que $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_\lambda a_\lambda(X) b_\lambda(Y)$, alors elles forment des bases de Λ , duales relativement au produit scalaire considéré.

Démonstration Puisque les a_μ et b_μ sont des fonctions symétriques, elles se décomposent sur les fonctions de Schur. Autrement dit,

$$\forall \mu \text{ partition, } \exists (\alpha_{\lambda,\mu})_\lambda \text{ et } (\beta_{\lambda,\mu})_\lambda \text{ suites presque nulles telles que } a_\mu = \sum_\lambda \alpha_{\lambda,\mu} s_\lambda \text{ et } b_\mu = \sum_{\lambda'} \beta_{\lambda',\mu} s_{\lambda'}.$$

La formule de Cauchy du paragraphe 6.1.8 montre que l'hypothèse devient

$$\sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y) = \sum_\mu a_\mu(X) b_\mu(Y),$$

soit encore avec les décompositions précédentes

$$\sum_\lambda s_\lambda(X) s_\lambda(Y) = \sum_{\lambda,\lambda'} \left(\sum_\mu \alpha_{\lambda,\mu} \beta_{\lambda',\mu} \right) s_\lambda(X) s_{\lambda'}(Y).$$

Puisque les s_λ forment une base de Λ , l'ensemble des produits $s_\lambda(X) s_{\lambda'}(Y)$ forment une famille libre. Il est donc immédiat au vu de la relation obtenue que

$$\sum_\mu \alpha_{\lambda,\mu} \beta_{\lambda',\mu} = \delta_{\lambda,\lambda'}.$$

Les matrices $A := (\alpha_{\lambda,\mu})$ et $B := (\beta_{\mu,\lambda'})$, que l'on peut supposer carrées⁵, sont telles que $AB = Id$, donc $BA = Id$ aussi. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle a_\mu, b_\nu \rangle &= \sum_{\lambda,\lambda'} \alpha_{\lambda,\mu} \beta_{\lambda',\nu} \langle s_\lambda, s_{\lambda'} \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda,\mu} \beta_{\lambda,\nu} \\ &= \sum_{\lambda} \beta_{\lambda,\nu} \alpha_{\lambda,\mu} \\ &= \delta_{\nu,\mu}. \end{aligned}$$

Cela montre la dualité des deux bases. \square

Proposition 38 Les familles de fonctions symétriques complètes et monomiales sont duales pour \langle, \rangle .

5. En effet, on a en quelque sorte "stabilisé" la situation en considérant Λ et non plus seulement Λ_n dans la mesure où les longueurs des partitions λ peuvent être arbitrairement grandes.

Démonstration On remarque que

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} &= \prod_j \left(\prod_i (1 - X_i Y_j)^{-1} \right) \\
&= \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{k \geq 0} h_k(X) Y_j^k \right) && \text{d'après la démonstration du lemme 6} \\
&= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p, \dots \geq 0} h_{k_1}(X) h_{k_2}(X) \dots h_{k_p}(X) \dots Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} \dots Y_p^{k_p} \dots \\
&= \sum_{\lambda \text{ partition}} h_\lambda(X) m_\lambda(Y).
\end{aligned}$$

Comme, de plus, les m_λ et les h_λ sont des fonctions symétriques homogènes de degré $|\lambda|$, le lemme précédent montre que $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$. \square

Remarque : Le produit scalaire que nous avons défini s'étend bien évidemment à l'espace des fonctions symétriques à coefficients rationnels $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$. Cela permet d'avoir le résultat suivant.

Proposition 39 *Les sommes de Newton constituent une base orthogonale de $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$. Plus précisément, $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}$.*

Démonstration Cela repose notamment sur l'identité $\prod_{i,j} (1 - X_i Y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda(X) p_\lambda(Y)}{z_\lambda}$, démontrée à la proposition 35.

On applique alors le lemme 7 aux familles $\left(\frac{p_\lambda}{z_\lambda} \right)_\lambda$ et $(p_\lambda)_\lambda$ (dont les éléments, appartenant à $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$, sont symétriques homogènes de degré $|\lambda|$). Le lemme est en effet encore valable pour $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$. Cela donne : $\left\langle \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, p_\mu \right\rangle = \delta_{\lambda, \mu}$ puis le résultat en multipliant les deux côtés de l'égalité par z_λ . \square

6.2 Détermination des caractères du groupe symétrique

On rappelle qu'une représentation est caractérisée par son caractère et que l'étude d'une représentation de dimension finie se ramène à l'étude de ses représentations irréductibles.

6.2.1 L'anneau des caractères

Pour $n \geq 1$, on note R^n le \mathbb{Z} -module engendré par les caractères irréductibles du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On pose aussi $R^0 := \mathbb{Z} \cdot 1$ où 1 désigne l'application constante égale à 1.

On considère à présent la somme directe de \mathbb{Z} -modules $R := \bigoplus_{n \geq 0} R^n$.

R est muni d'une structure d'anneau gradué commutatif de la manière suivante :

Si χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ sont les caractères de représentations ρ et ρ' de \mathfrak{S}_n et \mathfrak{S}_m respectivement, leur produit est défini comme le caractère de la représentation de \mathfrak{S}_{n+m} induite par la représentation produit $\rho \otimes \rho'$ du sous groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ de \mathfrak{S}_{n+m} . En symboles, cela donne :

$$\chi_\rho \cdot \chi_{\rho'} = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}).$$

La propriété de graduation est évidente. La seule propriété non triviale ici pour obtenir un anneau est le fait que la multiplication \cdot est une loi associative.

Or, par définition des R^n , il suffit de montrer l'associativité pour trois caractères $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ et $\chi_{\rho''}$ appartenant respectivement à R^m, R^n et R^p .

On a :

$$\begin{aligned}
(\chi_\rho \cdot \chi_{\rho'}) \cdot \chi_{\rho''} &= \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}) \right) \cdot \chi_{\rho''} \\
&= \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{m+n} \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} \left(\left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}) \right) \otimes \chi_{\rho''} \right) \\
&= \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{m+n} \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} \left(\left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}) \right) \otimes \text{Ind}_{\mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} (\chi_{\rho''}) \right) \\
&= \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{m+n} \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} ((\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}) \otimes \chi_{\rho''}) \right) && \text{(proposition 22)} \\
&= \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} ((\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'}) \otimes \chi_{\rho''}) && \text{(transitivité de l'induction)} \\
&= \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'} \otimes \chi_{\rho''}) && \text{(associativité du produit tensoriel)}
\end{aligned}$$

En faisant des calculs strictement analogues, on montrerait aussi que :

$$\chi_\rho \cdot (\chi_{\rho'} \cdot \chi_{\rho''}) = \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p}^{\mathfrak{S}_{m+n+p}} (\chi_\rho \otimes \chi_{\rho'} \otimes \chi_{\rho''}).$$

Cela prouve l'associativité de \cdot .

L'anneau gradué R ainsi construit est appelé anneau des caractères. On ne le confondra pas avec l'anneau des caractères que l'on peut définir sur chaque groupe.

Chaque R^n est muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}_n}$ et défini comme de manière générale pour un groupe compact G quelconque. Comme le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est fini, l'intégrale devient simplement une somme finie :

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \phi(\sigma) \overline{\psi(\sigma')}.$$

On munit R du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ induit par les $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}_n}$ en décrétant que les R^n sont deux à deux orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$.

6.2.2 L'application caractéristique de Frobenius

Puisqu'une permutation σ de \mathfrak{S}_n est déterminée par le type de sa décomposition en produits de cycles disjoints, on notera dans la suite $\rho_n(\sigma)$ (ou simplement $\rho(\sigma)$ en l'absence d'ambiguïté) la partition de n associée à cette décomposition de σ . Un théorème garantit que c'est même la partition associée à toute la classe de conjugaison de σ .

Définition On appelle application caractéristique le morphisme de \mathbb{Z} -modules $ch : R \rightarrow \Lambda \otimes \mathbb{C}$ défini de la manière suivante : si $\phi = k.1 \in R^0$, $ch(\phi) = k$ et si $\phi \in R^n$, avec $n \geq 1$, $ch(\phi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \phi(\sigma) p_{\rho(\sigma)}$, la somme faisant ainsi intervenir les polynômes de Newton.

Proposition 40 Pour $n \geq 1$ et $\phi \in R^n$, $ch(\phi) = \sum_{|\lambda|=n} \phi_\lambda \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$, où ϕ_λ désigne la valeur prise par ϕ sur la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n définie par la partition λ .

Cela a bien un sens puisque d'une part ϕ est une fonction centrale, donc constante sur les classes de conjugaison et d'autre part, à toute partition de poids n est associée une classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n .

Démonstration Soit \mathcal{R} un système de représentants des classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . Prenons $\phi \in R^n$. Puisque la fonction $\sigma \mapsto \phi(\sigma) p_{\rho(\sigma)}$ est constante sur les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n , il découle de la définition que :

$$ch(\phi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}} |O(\sigma)| \phi(\sigma) p_{\rho(\sigma)},$$

où on a noté par $|O(\sigma)|$ le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans \mathfrak{S}_n .

Comme de plus se donner $\sigma \in \mathcal{R}$ revient à se donner la partition de poids n associée $\rho(\sigma)$, il vient :

$$ch(\phi) = \sum_{|\rho|=n} \frac{|O(\sigma)|}{n!} \phi_\rho p_\rho.$$

Ensuite, par propriété des actions de groupe, $O(\sigma)$ est en bijection avec le quotient de \mathfrak{S}_n par le stabilisateur de σ . Or, le stabilisateur de σ correspond exactement au centralisateur $C(\sigma)$ de σ car il s'agit d'une action par conjugaison. Comme de

plus, \mathfrak{S}_n est fini de cardinal $n!$, on a l'égalité entre cardinaux $\frac{n!}{|C(\sigma)|} = |O(\sigma)|$.

Enfin, z_ρ défini au paragraphe 6.1.8 est exactement le cardinal du centralisateur d'un élément de la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n associée à la partition ρ .

Le résultat en découle alors. \square

THÉORÈME 6.3 —

L'application caractéristique ch définit un isomorphisme isométrique d'anneaux gradués de l'anneau des caractères du groupe symétrique (R, \langle, \rangle_R) sur l'anneau des polynômes symétriques $(\Lambda, \langle, \rangle)$.

Démonstration — Par définition, ch est un morphisme de groupes additifs.

- $ch(1_R) = 1_\Lambda$ aussi par définition.
- Montrons que pour tous $\phi, \psi \in R$, $ch(\phi \cdot \psi) = ch(\phi).ch(\psi)$. Il suffit par définition de R comme somme directe de montrer l'égalité pour $(\phi, \psi) \in R^m \times R^n$, où m et n sont des entiers naturels. C'est clair si ϕ ou ψ est dans R^0 . On suppose donc $(\phi, \psi) \in R^m \times R^n$ avec $m, n \geq 1$. Le produit $\phi \cdot \psi$ est alors un élément de R^{m+n} .

On a donc par définition : $ch(\phi \cdot \psi) = \frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}} \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\phi \otimes \psi) \right) (\sigma) \cdot p_{\rho(\sigma)}$.

On fixe maintenant $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ et on note encore $p_{\rho(\sigma)}$ la fonction polynômiale associée au polynôme de Newton.

On a ainsi $ch(\phi \cdot \psi)(x_1, \dots, x_{m+n}) = \langle \text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\phi \otimes \psi), p \rangle_{\mathfrak{S}_{m+n}}$ où l'on définit

$$p : \mathfrak{S}_{m+n} \rightarrow \mathbb{C} \\ \sigma \mapsto p_{\rho_{m+n}(\sigma)}(x_1, \dots, x_N).$$

Appliquons maintenant la formule de réciprocity de Frobenius avec $\phi \otimes \psi$ (fonction centrale sur $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$) et p (centrale sur \mathfrak{S}_{m+n}). Il vient :

$$\begin{aligned} ch(\phi \cdot \psi)(x_1, \dots, x_N) &= \langle \phi \otimes \psi, p|_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \rangle_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n|} \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \phi \otimes \psi(\sigma, \sigma') p_{(\rho_m(\sigma), \rho_n(\sigma'))}(x_1, \dots, x_N) \\ &= \frac{1}{m!n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_m \\ \sigma' \in \mathfrak{S}_n}} \phi(\sigma) \psi(\sigma') (p_{\rho(\sigma)} p_{\rho(\sigma')})(x_1, \dots, x_N) \\ &= \left(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \phi(\sigma) p_{\rho(\sigma)}(x_1, \dots, x_N) \right) \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \psi(\sigma') p_{\rho(\sigma')}(x_1, \dots, x_N) \right) \\ &= ch(\phi)(x_1, \dots, x_N).ch(\psi)(x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

Les fonctions polynômiales $ch(\phi \cdot \psi)$ et $ch(\phi).ch(\psi)$ coïncident ainsi sur tout \mathbb{C}^N . Les polynômes correspondants sont donc égaux.

A ce stade, on a donc montré que ch est un homomorphisme d'anneaux.

- On voit directement sur la définition que $\forall n \in \mathbb{N}, ch(R^n) \subset \Lambda^n$; cela montre que ch respecte la graduation.
- Il est aussi clair que $\text{Ker}(ch) = \{0\}$.
- Examinons le caractère isométrique de ch . Comme R^n et R^m sont orthogonaux pour \langle, \rangle_R dès que $n \neq m$, ch est une isométrie si et seulement si pour tous $n \in \mathbb{N}, \phi, \psi \in R^n, \langle ch(\phi), ch(\psi) \rangle_\Lambda = \langle \phi, \psi \rangle_R$. C'est clair pour $n = 0$. Prenons donc $n \geq 1$.

On a d'après la proposition 40 et en conservant les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} \langle ch(\phi), ch(\psi) \rangle_\Lambda &= \sum_{|\rho|=|\lambda|=n} \frac{\phi_\rho \overline{\psi_\lambda}}{z_\rho z_\lambda} \langle p_\rho, p_\lambda \rangle_\Lambda \\ &= \sum_{|\rho|=|\lambda|=n} \frac{\phi_\rho \overline{\psi_\lambda}}{z_\rho} \delta_{\rho, \lambda} \\ &= \sum_{|\lambda|=n} \frac{\phi_\lambda \overline{\psi_\lambda}}{z_\lambda} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \frac{\phi(\sigma) \overline{\psi(\sigma)}}{|C(\sigma)|} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \phi(\sigma) \overline{\psi(\sigma)} \\ &= \langle \phi, \psi \rangle_{\mathfrak{S}_n} \\ &= \langle \phi, \psi \rangle_R. \end{aligned}$$

- Enfin en notant $1_{\mathfrak{S}_n}$ le caractère trivial de \mathfrak{S}_n , il vient $ch(1_{\mathfrak{S}_n}) = \sum_{|\rho|=n} 1 \cdot \frac{p_\rho}{z_\rho} = h_n$. Donc $h_n \in \text{Im}(ch)$.

Le raisonnement suivant montre que h_n est une base algébrique de Λ .

Si on prend P dans Λ , il existe $p \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq p, \exists ! P_k \in \Lambda^k, P = \sum_{k=0}^p P_k$; comme chacun des P_k est 0 ou une série formelle en une famille dénombrable d'indéterminées X_1, \dots, X_n, \dots , symétrique et homogène de degré k , P est 0 ou une série formelle en une famille dénombrable d'indéterminées, symétrique de degré total inférieur ou égal à p . Ainsi, chaque terme intervenant dans cette série est de la forme $X_{i_1}^{d_1} X_{i_2}^{d_2} \dots X_{i_l}^{d_l}$ avec $1 \leq l \leq p, \sum_{k=1}^l d_k \leq p$ et $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_l$; mais évidemment, comme P est symétrique, tous les $\sigma \cdot X_{i_1}^{d_1} X_{i_2}^{d_2} \dots X_{i_l}^{d_l}$ sont aussi des constituants de P et donc $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i_l}} \sigma \cdot X_{i_1}^{d_1} X_{i_2}^{d_2} \dots X_{i_l}^{d_l}$ est élément de Λ_{i_l} . Or, on sait que les h_i pour $1 \leq i \leq i_l$ forment une base algébrique

de Λ_{i_l} , c'est-à-dire que $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i_l}} \sigma \cdot X_{i_1}^{d_1} X_{i_2}^{d_2} \dots X_{i_l}^{d_l}$ s'écrit comme polynôme à coefficients entiers en les h_i pour $1 \leq i \leq i_l$.

On voit alors, puisque P est susceptible de contenir une infinité de termes du type $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{i_l}} \sigma \cdot X_{i_1}^{d_1} X_{i_2}^{d_2} \dots X_{i_l}^{d_l}$ avec $i_l \in \mathbb{N}^*$,

que P s'écrit comme une série formelle à coefficients entiers en les h_i pour $i \in \mathbb{N}$.

Il vient donc $\Lambda \subset \text{Im}(ch)$. L'argument suivant va alors montrer que $\Lambda = \text{Im}(ch)$.

ch est une isométrie, donc est injective. De plus, $s_\lambda \in \Lambda \subset \text{Im}(ch)$; il existe donc un unique antécédent χ_λ de s_λ par ch . Si $x \in R$, alors $ch(x) = \sum_{\lambda} \langle ch(x), s_\lambda \rangle s_\lambda = \sum_{\lambda} \langle x, \chi_\lambda \rangle s_\lambda$.

Or, $\langle x, \chi_\lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ car le produit scalaire sur R est à valeurs entières. Par suite, $ch(x) = \sum_{\lambda} \langle x, \chi_\lambda \rangle s_\lambda \in \Lambda$. D'où l'inclusion $\text{Im}(ch) \subset \Lambda$. □

Conséquence : On sait que l'ensemble \mathcal{B} des caractères irréductibles du groupe \mathfrak{S}_n forme une base orthonormée de R^n pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}_n}$. Or une base orthonormée d'un \mathbb{Z} -module (quand elle existe) est unique à l'ordre et au signe près.

Ainsi aux signes près, les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n sont les images réciproques des polynômes de Schur par l'application caractéristique. On notera $\chi^\lambda := ch^{-1}(s_\lambda)$; les caractères irréductibles sont donc les $\pm \chi^\lambda$.

6.2.3 Formule des caractères de Frobenius

THÉORÈME 6.4 —

Les caractères irréductibles du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sont les χ^λ où λ décrit l'ensemble des partitions de poids n . De plus, leurs valeurs sur les différentes classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n sont égales aux coefficients des sommes de Newton dans la base des fonctions de Schur. Plus précisément, en notant χ_μ^λ la valeur prise par le caractère irréductible χ^λ sur la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n définie par la partition μ , il vient :

$$p_\mu = \sum_{|\lambda|=n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda.$$

Démonstration Pour montrer que les χ^λ sont bien les caractères irréductibles, il suffit de vérifier $\chi^\lambda(1_{\mathfrak{S}_n}) > 0$.

Or, un calcul élémentaire montre que $ch^{-1}(p_\mu) = z_\mu \delta^\mu$ où $\delta^\mu = \begin{cases} 1 & \text{sur la classe de conjugaison associée à } \mu \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$. Donc

$$\begin{aligned} \langle s_\lambda, p_\mu \rangle_\Lambda &= \langle \chi^\lambda, z_\mu \delta^\mu \rangle_{\mathfrak{S}_n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma) z_\mu \delta^\mu(\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in O(\mu)} \chi^\lambda(\sigma) z_\mu \\ &= \chi_\mu^\lambda, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $|O(\mu)| = \frac{n!}{z_\mu}$ où l'on note $O(\mu)$ la classe de conjugaison associée à la partition μ .

En particulier,

$$\begin{aligned}
 \chi^\lambda(1_{\mathfrak{S}_n}) &= \langle s_\lambda, p_{1^{[n]}} \rangle_\Lambda \\
 &= \langle s_\lambda, \sum_{\lambda'} K_{\lambda', 1^{[n]}} s_{\lambda'} \rangle_\Lambda \quad (\text{proposition 29}) \\
 &= \sum_{\lambda'} K_{\lambda', 1^{[n]}} \langle s_\lambda, s_{\lambda'} \rangle_\Lambda \\
 &= K_{\lambda, 1^{[n]}} \\
 &= K_\lambda > 0,
 \end{aligned}$$

où on a noté par K_λ le nombre de tableaux standards de forme λ . Cela démontre en même temps les deux parties du théorème. \square

Proposition 41 *Le degré de la représentation irréductible V^λ de \mathfrak{S}_n de caractère χ^λ est égal à K_λ .*

Démonstration Cela découle de la fin de la démonstration précédente et du fait que $\chi^\lambda(1_{\mathfrak{S}_n}) = \text{tr}(\rho^\lambda(1_{\mathfrak{S}_n})) = \text{tr}(Id_{V^\lambda}) = \text{deg}(\rho^\lambda)$. \square

Remarque : Il est possible de calculer explicitement le nombre de Kostka K_λ pour λ partition donnée.

A chaque case de coordonnées (i, j) du diagramme de Ferrers associé à la partition λ , on associe sa longueur d'équerre $h(i, j) := (\lambda_i - j + 1) + (\lambda_j^* - i + 1) - 1 = \lambda_i + \lambda_j^* - i - j + 1$; c'est la longueur de l'équerre tracée sur λ , d'angle supérieur gauche la case (i, j) .

On peut ainsi rassembler les différentes longueurs d'équerre dans un tableau de même forme que le diagramme de Ferrers associé à λ . On note $h(\lambda)$ le produit des longueurs des équerres de λ .

Le nombre de tableaux standards de forme λ est alors donné par la formule de Frame-Robinson-Thrall suivante :

$$K_\lambda = \frac{|\lambda|!}{h(\lambda)}.$$

Par exemple, partant de $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, l'équerre associée à la case $(1, 2)$ est donnée par les cases marquées du symbole \blacksquare :

	\blacksquare	\blacksquare	\blacksquare
	\blacksquare		
	\blacksquare		

On trouve ainsi $h(1, 2) = 5$.

En refaisant la même opération pour toutes les cases du diagramme de Ferrers, on aboutit aux longueurs d'équerre

	7	5	2	1
	4	2		
	3	1		
	1			

suivantes.

Par suite, le degré de la représentation V^λ de \mathfrak{S}_9 est 1680.

6.2.4 Application de la formule de Frobenius

Grâce aux formules de Newton liant les p_k aux h_k , on peut exprimer aisément pour des valeurs de n peu élevées les p_μ (pour μ partition de poids n) en fonction des h_λ . Comme on sait aussi exprimer les h_λ en fonction des s_λ (via les nombres de Kostka), on peut au final exprimer les p_μ sur la base des s_λ , avec $|\lambda| = n$. On déduit ainsi les valeurs des caractères χ^λ sur les différentes classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . On peut alors construire la table de caractères du groupe \mathfrak{S}_n .

Illustrons cela dans le cas $n = 4$.

Les partitions de poids 4 sont $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1)$ et (4) . Dans la suite, dans un souci de simplification d'écriture, on écrira seulement 1111, 211, etc.

Par résolution d'un système triangulaire obtenu via les relations de Newton, il vient :

$$\begin{cases}
 p_1 = h_1 \\
 p_2 = 2h_2 - h_1^2 \\
 p_3 = 3h_3 - 3h_1h_2 + h_1^3 \\
 p_4 = 4h_4 - 4h_1h_3 - 2h_2^2 + 4h_1^2h_2 - h_1^4.
 \end{cases}$$

On en déduit aussitôt :

$$\begin{cases} p_{1111} = (p_1)^4 = h_{1111} \\ p_{211} = p_2(p_1)^2 = 2h_{211} - h_{1111} \\ p_{22} = (p_2)^2 = 4h_{22} - 4h_{211} + h_{1111} \\ p_{31} = p_3p_1 = 3h_{31} - 3h_{211} + h_{1111} \\ p_4 = 4h_4 - 4h_{31} - 2h_{22} + 4h_{211} - h_{1111} \end{cases} .$$

Puis, par dénombrement de tableaux semistandard, il vient :

$$\begin{cases} h_{1111} = 1.s_{1111} + 3.s_{211} + 2.s_{22} + 3.s_{31} + 1.s_4 \\ h_{211} = 0.s_{1111} + 1.s_{211} + 1.s_{22} + 2.s_{31} + 1.s_4 \\ h_{22} = 0.s_{1111} + 0.s_{211} + 1.s_{22} + 1.s_{31} + 1.s_4 \\ h_{31} = 0.s_{1111} + 0.s_{211} + 0.s_{22} + 1.s_{31} + 1.s_4 \\ h_4 = 0.s_{1111} + 0.s_{211} + 0.s_{22} + 0.s_{31} + 1.s_4 \end{cases} .$$

En injectant ces dernières relations dans le système précédent, on arrive immédiatement à la table des caractères de \mathfrak{S}_4 suivante, les coefficients étant les χ_μ^λ ; les lignes correspondent aux caractères et les colonnes aux classes de conjugaison.

$\lambda \setminus \mu$	1111	211	22	31	4
1111	1	-1	1	1	-1
211	3	-1	-1	0	1
22	2	0	2	-1	0
31	3	1	-1	0	-1
4	1	1	1	1	1

6.2.5 Complément sur les valeurs des caractères irréductibles

Définition On appelle bande tout ensemble connexe θ de cases d'un tableau qui ne contient aucun carré de côté deux.

Sa hauteur $h(\theta)$ est défini comme le nombre de lignes occupées par cette bande moins un.

Un tableau multibande T est un tableau numéroté de façon croissante sur les lignes et sur les colonnes, de façon à ce que ses cases numérotées d'un même entier naturel forment une bande. On définit alors sa hauteur $h(T)$ comme la somme des hauteurs des bandes incluses dans T .

Par exemple, soit le tableau multibande suivant :

1	1	3	3	4
1	2	4	4	4
2	2	4		
2				

Il vient très clairement $h(T) = 1 + 2 + 0 + 2 = 5$.

Le théorème suivant précise les valeurs des caractères irréductibles du groupe symétrique en terme de tableaux multibandes.

THÉORÈME 6.5 (RÈGLE DE MURNAGHAN-NAKAYAMA) —

Pour toutes partitions λ et μ de poids n , la valeur du caractère χ^λ sur la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n associée à μ est égale à : $\chi_\mu^\lambda = \sum_{T \in \mathcal{F}_{\lambda, \mu}} (-1)^{h(T)}$ où $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}$ désigne l'ensemble des tableaux multibande de forme λ et de poids μ .

6.3 Les modules de Specht, représentations du groupe symétrique

Soit T un tableau de forme la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et numéroté par les entiers successifs de 1 à $n = |\lambda|$, sans aucune condition de monotonie (il y a ainsi $n!$ tableaux T possibles).

A T , on associe les polynômes :

$$Q_T = \prod_{k=1}^n X_k^{l(k)-1} \quad \text{où } l(k) \text{ est l'indice de la ligne de } T \text{ contenant l'entier } k$$

$$P_T = \prod_{\substack{i <_T j \\ i < j}} (X_i - X_j) \quad \text{où } i <_T j \text{ signifie que } i \text{ se trouve au-dessus de } j \text{ dans la même colonne de } T$$

Par exemple, si $\lambda = (3, 1, 1)$ et $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 5 \\ \hline 1 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$, on a $Q_T = X_1 X_2^2$ et $P_T = (X_4 - X_1)(X_4 - X_2)(X_1 - X_2)$

Le groupe \mathfrak{S}_n agit par permutation sur les tableaux par permutation des entrées.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note que $Q_{\sigma(T)} = \sigma \cdot Q_T$ et $P_{\sigma(T)} = \sigma \cdot P_T$.

On prolonge naturellement cette action de \mathfrak{S}_n à une action de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Définition On nomme $\mathcal{C}(T)$ le sous-groupe de \mathfrak{S}_n constitué des permutations préservant chaque colonne de T .

On note alors $a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}(T)} \epsilon(\sigma) \sigma$.

Proposition 42 $P_T = \pm a_T \cdot Q_T$.

Notons N^λ le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les Q_T quand T décrit l'ensemble des tableaux de forme λ . On prolonge de manière naturelle l'action de \mathfrak{S}_n à cet espace vectoriel.

Se donner un polynôme Q_T revient au vu de la définition à se donner le contenu de chaque ligne de T indépendamment de l'ordre. Donc N^λ s'identifie à la représentation induite par la représentation triviale du sous-groupe $\mathcal{L}(T)$ (préservant les lignes de T) de \mathfrak{S}_n . En particulier, N^λ est un \mathfrak{S}_n -module (au sens des représentations).

Définition On appelle module de Specht associé à la partition λ et on note S^λ le sous \mathfrak{S}_n -module de N^λ engendré par les polynômes P_T quand T décrit l'ensemble des tableaux de forme λ .

Lemme 8 Soient λ et μ deux partitions de poids n . On note T et S deux tableaux de formes respectives λ et μ et numérotés par les entiers successifs. Alors l'une des trois situations suivantes est satisfaite :

1. $\lambda \succ \mu$.
2. $\lambda = \mu$ et $\exists(\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}(T) \times \mathcal{L}(S), \sigma \cdot T = \sigma' \cdot S$.
3. il existe deux entiers figurant dans une même colonne de T et une même ligne de S .

Démonstration Si (3) n'est pas vérifié, les entiers (s_1, \dots, s_{μ_1}) de la première ligne de S sont dans des colonnes distinctes de T . Donc, quitte à opérer à l'intérieur des colonnes de T , on peut supposer que s_1, \dots, s_{μ_1} appartiennent à la première ligne de T . On a alors notamment $\mu_1 \leq \lambda_1$.

Plus généralement, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut permuter les entrées des colonnes de T de façon à faire figurer sur les i premières lignes de T les entrées des i premières lignes de S . On a alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$. Ainsi $\lambda \succcurlyeq \mu$. Si l'on n'est pas non plus dans le cas (1), c'est que $\lambda = \mu$. Alors après avoir permuté chaque colonne de T , on obtient un diagramme ayant même contenu que S sur chaque ligne. Le cas (2) est alors vérifié. \square

THÉORÈME 6.6 —

Lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de poids n , les modules de Specht S^λ forment un ensemble complet de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n , deux à deux non-équivalentes.

De plus le caractère de la représentation S^λ est précisément χ^λ .

Démonstration On s'appuie sur le lemme précédent.

– Si le second cas du lemme se produit, il vient avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned}
a_T \cdot Q_S &= a_T \cdot (\sigma' \cdot Q_S) && \text{car } \sigma' \in \mathcal{L}(S) \\
&= a_T \cdot (\sigma \cdot Q_T) \\
&= (a_T \sigma) \cdot Q_T \\
&= \sum_{w \in \mathcal{C}(T)} \epsilon(w) w \sigma \cdot Q_T \\
&= \sum_{w \in \mathcal{C}(T)} \epsilon(w \sigma^{-1}) w \cdot Q_T && \text{car } w \mapsto w \sigma \text{ est une bijection de } \mathcal{C}(T) \text{ sur } \mathcal{C}(T) \\
&= \epsilon(\sigma) (a_T \cdot Q_T) && \text{car } \epsilon \text{ est un morphisme de groupes à valeurs dans } \{-1, 1\} \\
&= \epsilon(\sigma) P_T
\end{aligned}$$

– Par contre, si on est dans le cas (3) du lemme, il existe τ une transposition appartenant à $\mathcal{C}(T) \cap \mathcal{L}(S)$. Le même calcul que précédemment montre (puisque la signature de τ vaut -1) que $a_T \cdot Q_S = -a_T \cdot Q_S$ puis $a_T \cdot Q_S = 0$.

On vient de voir que si S et T sont des tableaux de forme λ rempli par les n premiers entiers, $a_T \cdot Q_S$ est toujours proportionnel à P_T . D'où :

$$a_T \cdot N^\lambda = a_T \cdot S^\lambda = \{z \cdot P_T | z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \cdot P_T.$$

Si S^λ est somme directe de deux sous-modules A et B , alors $\mathbb{C} \cdot P_T = a_T \cdot A \oplus a_T \cdot B$, donc P_T est un élément de A ou de B . Disons P_T appartient à B .

Mais alors, comme $\{\sigma \cdot P_T | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ engendre S^λ , il vient $B = S^\lambda$.

Ainsi, S^λ est bien irréductible.

Si $\lambda \not\prec \mu$, on est dans le dernier cas du lemme, donc d'après ce qui précède, $a_T N^\mu = a_T S^\mu = \{0\}$. Cela assure que les représentations S^λ et S^μ de \mathfrak{S}_n ne sont pas équivalentes.

En somme, les modules de Specht forment un ensemble complet de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n .

Le même argument implique alors que la décomposition de N^λ en représentations irréductibles est de la forme :

$$N^\lambda = n_\lambda S^\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \prec \mu} n_{\mu,\lambda} S^\mu \right),$$

où n_λ et les $n_{\mu,\lambda}$ sont des entiers naturels.

Comme N^λ est le \mathfrak{S}_n -module induit par la représentation triviale du sous-groupe $\mathcal{L}(T)$ de \mathfrak{S}_n , on connaît son caractère : c'est l'image réciproque par l'application caractéristique ch de la fonction symétrique h_λ .

Or,

$$\begin{aligned} h_\lambda &= \sum_{\mu} K_{\mu,\lambda} s_\mu \\ &= s_\lambda + \sum_{\mu \succ \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu \end{aligned}$$

Donc le caractère de la représentation N^λ est égal à $\chi^\lambda + \sum_{\mu \succ \lambda} K_{\mu,\lambda} \chi^\mu$. Le rapprochement entre les deux écritures $N^\lambda =$

$n_\lambda S^\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \prec \mu} n_{\mu,\lambda} S^\mu \right)$ et $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \succ \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu$ et une récurrence descendante sur l'ordre \prec (partiel sur l'ensemble des partitions mais qui devient total si on le restreint à l'ensemble fini des partitions de même poids) montre que le caractère de S^λ est χ^λ et que $n_{\mu,\lambda} = K_{\mu,\lambda}$ pour tout couple (λ, μ) tel que $\lambda \prec \mu$. On obtient en outre $n_\lambda = 1$ et donc aussi

$$N^\lambda = S^\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \prec \mu} K_{\mu,\lambda} S^\mu \right).$$

On a montré alors ce que l'on voulait. □

On donne finalement un théorème important, dont la démonstration, constructive, va fournir le moyen de représenter sous forme matricielle l'action du groupe symétrique sur les tableaux de forme λ .

THÉORÈME 6.7 —

Lorsque T décrit l'ensemble des tableaux standard de forme λ , les polynômes P_T forment une base du module de Specht S^λ .

Démonstration Remarquons d'abord que si un polynôme P_S se décompose sur les P_T avec les T standards, alors $\sigma \cdot P_S$ pour $\sigma \in \mathcal{C}(S)$ se décompose aussi sur ces éléments (puisque $\sigma \cdot P_S = \epsilon(\sigma) P_S$). On peut donc se restreindre aux tableaux T dont les entrées sont croissantes de haut en bas, ceci dans chaque colonne.

On introduit l'ordre lexicographique (noté $<$) sur l'ensemble des P_S où S décrit les tableaux dont les entrées sont croissantes de haut en bas : c'est l'ordre sur la suite des entrées de ces tableaux, lue de haut en bas, colonne après colonne (de gauche à droite).

On montre par récurrence pour cet ordre total que chaque P_S est combinaison linéaire de polynômes P_T où T est standard. Comme leur nombre (qui est le nombre de Kostka K_λ) est exactement la dimension de la représentation irréductible S^λ , on aura que les P_T forment une base de S^λ .

Prenons P_S un polynôme dont les entrées sont croissantes dans chaque colonne et supposons que $\forall R < S, P_R$ est combinaison linéaire de polynômes P_T avec T standard.

Si S est déjà standard, il n'y a rien à montrer.

Supposons donc que S n'est pas standard. Alors il existe deux colonnes successives $\begin{matrix} a_1 \\ \wedge \\ a_2 \\ \vdots \\ \wedge \\ a_l \end{matrix}$ et $\begin{matrix} b_1 \\ \wedge \\ b_2 \\ \vdots \\ \wedge \\ b_m \end{matrix}$ de S avec $m \leq l$ et il existe

un entier $r \leq m$ tel que $\forall i < r, a_i < b_i$ et $a_r > b_r$.

Schématiquement, cela donne : $\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \\ a_r & > & b_r \\ \wedge & & \wedge \\ \vdots & & \vdots \\ \wedge & & b_m \\ a_1 \end{matrix}$. Soient H le groupe des permutations des entiers $b_1 < \dots < b_r < a_r < \dots < a_l$

et K le sous-groupe de Young de H correspondant au produit des groupes de permutations de b_1, \dots, b_r et a_r, \dots, a_l . Soit U un système de représentants des classes à droite de H modulo K (autrement dit, les classes sont les Kh pour h décrivant U), autres que celle de l'identité.

On a alors la relation de Garnir suivante que l'on démontre plus bas :

$$P_S = - \sum_{u \in U} \epsilon(u) P_{u(S)}.$$

Il s'agit encore de vérifier que $\forall u \in U, u(S) < S$ pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence.

Or, les colonnes précédant la colonne C où figurent les éléments a_1, \dots, a_l ne sont pas modifiées. De plus, les entiers a_1, \dots, a_{r-1} ne le sont pas non plus ; donc la suite formée par les r plus petites entrées de $u(C)$ est majorée par une suite $a_1 < \dots < b_i < \dots < a_{r-1}$ pour un certain entier $i \leq r$, elle-même majorée par la suite $a_1 < \dots < a_r$. Donc $\forall u \in U, u(S) < S$ et on a ce qu'on voulait.

La relation de Garnir assure donc en appliquant l'hypothèse de récurrence aux $P_{u(S)}$ que P_S est combinaison linéaire des polynômes P_T avec T standard.

Démonstration de la relation de Garnir :

Pour I sous-ensemble de \mathfrak{S}_n , notons $d_I := \sum_{w \in I} \epsilon(w)w$.

Montrer la relation $P_S = - \sum_{u \in U} \epsilon(u) P_{u(S)}$ revient à montrer $d_U \cup \{Id\} \cdot P_S = 0$.

Comme K est un sous-groupe de $\mathcal{C}(S)$, il s'agit de montrer que $d_H \cdot P_S = 0$.

Or,

$$\begin{aligned} d_H \cdot P_S &= \pm d_H a_S \cdot Q_S \\ &= \pm d_H d_{\mathcal{C}(S)} Q_S \\ &= \pm \sum_{(\sigma, \sigma') \in H \times \mathcal{C}(S)} \epsilon(\sigma) \epsilon(\sigma') (\sigma \sigma') \cdot Q_S \\ &= \pm \sum_{(\sigma, \sigma') \in H \times \mathcal{C}(S)} \epsilon(\sigma \sigma') (\sigma \sigma') \cdot Q_S \\ &= \pm \sum_{\sigma \in H} \sum_{u \in \sigma \mathcal{C}(S)} \epsilon(u) u \cdot Q_S \end{aligned}$$

Cette dernière double somme comprend $|H| \times |\mathcal{C}(S)|$ termes, soit encore $|HC(S)| \times |H \cap \mathcal{C}(S)|$ termes. Chaque élément $u \in HC(S)$ peut s'écrire comme produit d'un élément $h \in H$ et d'un élément $w \in \mathcal{C}(S)$ de $|H \cap \mathcal{C}(S)|$ manières différentes. On remarque aussi que par définition de K , $|K| = |H \cap \mathcal{C}(S)|$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} d_H P_S &= \pm |K| \sum_{u \in HC(S)} \epsilon(u)(u) \cdot Q_S \\ &= \pm |K| d_{HC(S)} \cdot Q_S \end{aligned}$$

Il suffit donc à présent de montrer que $d_{HC(S)} \cdot Q_S = 0$.

Notons maintenant pour $\sigma \in HC(S)$, $i_\sigma = \min \{k \in \mathbb{N} | \sigma(a_k) \text{ et } \sigma(b_k) \notin \{a_1, \dots, a_{r-1}, b_{r+1}, \dots, b_m\}\}$. On note $t(\sigma)$ la transposition $(a_{i_\sigma}, b_{i_\sigma})$ et $t^*(\sigma) = \sigma t(\sigma) \sigma^{-1}$ la transposition $(\sigma(a_{i_\sigma}), \sigma(b_{i_\sigma}))$. On pose enfin $\sigma^* := \sigma t(\sigma) = t^*(\sigma) \sigma$.

On a $t^*(\sigma) \in H$, donc $\sigma^* \in HC(S)$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} HC(S) & \rightarrow & HC(S) \\ \sigma & \mapsto & \sigma^* \end{array}$$

est alors bien définie et c'est une involution car $t(\sigma^*) = t(\sigma)$ (puisque σ et σ^* coïncident pour les valeurs différentes de a_{i_σ} et b_{i_σ} , et puisque $\sigma^*(a_k) = \sigma(b_k)$ et $\sigma^*(b_k) = \sigma(a_k)$).

Simplement, on constate que cette involution change la signature.

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} d_{HC(S)} \cdot Q_S &= \sum_{w^* \in HC(S)} \epsilon(w^*) w^* \cdot Q_S \\ &= \sum_{w \in HC(S)} -\epsilon(w) w t(w) \cdot Q_S \\ &= - \sum_{w \in HC(S)} \epsilon(w) w \cdot Q_S \quad \text{car } t(w) \in \mathcal{L}(S) \\ &= -d_{HC(S)} \cdot Q_S. \end{aligned}$$

Donc $d_{HC(S)} = 0$ et le résultat annoncé est prouvé. \square

Application : représentation naturelle de Young Les matrices de la représentation S^λ dans la base standard (formée des tableaux standards de forme λ ou encore des polynômes P_T avec T standard) constituent ce qu'on appelle la représentation naturelle de Young.

Comme \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions de la forme $(i \ i + 1)$ (dites *transpositions simples*), il suffit de calculer les matrices correspondant à ces éléments.

D'après la démonstration du dernier théorème, pour un tableau T donné rempli par les n entiers successifs de 1 à n , il y a trois possibilités :

- Si i et $i + 1$ sont dans la même colonne, alors $(i \ i + 1) \in \mathcal{C}(T)$ puis $(i \ i + 1) \cdot P_T = -P_T$.
- Si i et $i + 1$ ne sont ni dans la même ligne ni dans la même colonne, alors par propriété des tableaux standards, le tableau $(i \ i + 1)(T)$ est standard et $(i \ i + 1) \cdot P_T = P_{(i \ i + 1)(T)}$.
- Si i et $i + 1$ sont dans la même ligne, alors le tableau $(i \ i + 1)(T)$ va présenter deux éléments $a_r > b_r$ (a_r à gauche de b_r) dans cette même ligne. On calcule alors $(i \ i + 1) \cdot P_T$ à l'aide de la relation de Garnir. Il vient que $(i \ i + 1) \cdot P_T$ est la somme de P_T et d'autres polynômes associés à d'autres tableaux comme décrit sur la relation de Garnir. Si ces tableaux ne sont pas standards, une application itérée de ces trois cas permet de calculer les polynômes associés à ces nouveaux tableaux.

A la fin, on obtient donc $n - 1$ matrices de taille K_λ ($n - 1$ étant le nombre de transpositions simples de \mathfrak{S}_n et K_λ le nombre de tableaux standards) contenant uniquement des $-1, 0$ et 1 .

Exemple : On va expliciter les matrices des représentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_5 sur le module de Specht associé à la partition $(3, 2)$ dans la base des polynômes associés aux tableaux standards.

Dans ce cas, $K_{(3,2)} = 5$ et les 5 tableaux standards sont les suivants :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad T_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

On prendra donc $(P_{T_1}, P_{T_2}, P_{T_3}, P_{T_4}, P_{T_5})$ comme base standard. On note M_i la matrice associée à l'action de la transposition $(i \ i + 1)$ avec $1 \leq i \leq 4$ sur le module de Specht $S^{(3,2)}$. La $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M_i est donc formée des composantes du polynôme $(i \ i + 1) \cdot P_{T_j}$ sur la base des P_{T_k} , $1 \leq k \leq 5$.

On détaille le procédé d'obtention de la matrice M_1 .

$$1. \ (1 \ 2) \cdot P_{T_1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}.$$

On est ici dans le cas où 1 et 2 sont sur la même ligne.

En reprenant les notations de la démonstration du théorème, il vient $H = \mathfrak{S}(1, 2, 4)$, $K = \mathfrak{S}(2) \times \mathfrak{S}(1, 4)$ puis $U = \{(1\ 2), (1\ 4)\}$ est un système de représentants des classes à droites de H modulo K . Or, $(1\ 2) \cdot ((1\ 2)(T_1)) =$

$$T_1 \text{ et } (1\ 4) \cdot ((1\ 2)(T_1)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}. \text{ La relation de Garnir donne donc } (1\ 2) \cdot P_{T_1} = P_{T_1} + P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}}.$$

Or, le dernier tableau n'est pas standard, il faut donc réappliquer l'algorithme à ce dernier tableau.

$$\text{Maintenant, sur ce tableau, 1 et 2 sont dans la même colonne mais 2 est au-dessus de 1. Donc } P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}} =$$

$$-P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}}.$$

Mais sur ce nouveau tableau, 3 et 4 sont encore dans la même ligne avec 4 précédant 3. On applique donc une nouvelle fois la relation de Garnir à ce tableau avec $H = \mathfrak{S}(3, 4, 5)$, $K = \mathfrak{S}(3) \times \mathfrak{S}(4, 5)$ et donc $U = \{(3\ 4), (3\ 5)\}$.

On obtient cette fois :

$$P_{(1\ 2) \cdot T_1} = P_{T_1} - \left(P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}} + P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}} \right).$$

Les deux premiers tableaux (T_1 et T_4) sont maintenant standards. Le troisième doit encore être modifié puisque 4 précède 3 dans la deuxième colonne. Il vient finalement :

$$P_{(1\ 2) \cdot T_1} = P_{T_1} - \left(P_{T_4} - P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}} \right),$$

c'est-à-dire

$$P_{(1\ 2) \cdot T_1} = P_{T_1} - P_{T_4} + P_{T_5}.$$

On peut donc ainsi remplir la première colonne de la matrice M_1 .

$$2. (1\ 2) \cdot P_{T_2} = P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}}.$$

(On est encore dans le cas où 1 et 2 sont sur la même ligne.)

Ici, $H = \mathfrak{S}(1, 2, 3)$, $K = \mathfrak{S}(1) \times \mathfrak{S}(2, 3)$ et on prend $U = \{(1\ 2), (1\ 3)\}$.

Il vient :

$$(1\ 2) \cdot P_{T_2} = P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}} + P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}}, \\ = P_{T_2} - P_{T_4}$$

la dernière ligne provenant du fait que 2 précède 1 dans la première colonne du tableau $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array}$.

$$3. (1\ 2) \cdot P_{T_3} = P_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}}. \text{ On remarque que 4 et 5 jouent un rôle symétrique par rapport au calcul précédent.}$$

Il vient ainsi immédiatement $(1\ 2) \cdot P_{T_3} = P_{T_3} - P_{T_5}$.

$$4. \text{ Dans } T_4, 1 \text{ et } 2 \text{ sont dans la même colonne. Donc } (1\ 2) \cdot P_{T_4} = -P_{T_4}.$$

$$5. \text{ La situation est la même pour } T_5; \text{ on a } (1\ 2) \cdot P_{T_5} = -P_{T_5}.$$

$$\text{Par conséquent, } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les mêmes types d'opération avec les transpositions simples $(2\ 3)$, $(3\ 4)$ et $(4\ 5)$, il vient alors :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7 Détermination des caractères du groupe unitaire

On veut déterminer à présent les caractères du groupe unitaire défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $U(n) := \{g \in GL(n, \mathbb{C}), {}^t g \bar{g} = I_n\}$. C'est un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{C})$ des matrices inversibles de taille n qui est compact et connexe. Pour cela, on sera amené à utiliser des éléments de la théorie des groupes de Lie.

7.1 Généralités sur les groupes de Lie

7.1.1 Notion de variété différentielle

Définition On dit qu'un espace topologique séparé M est muni d'une structure de variété différentielle lisse ou \mathcal{C}^∞ de dimension n s'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de M , des ouverts Ω_i de l'espace vectoriel topologique \mathbb{R}^n et des homéomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ tels que pour tout couple d'indices (i, j) , la composition

$$\phi_{i,j} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

définisse un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

Remarques :

- Les homéomorphismes ϕ_i sont appelés *cartes locales* et les U_i sont appelés *ouverts de cartes*. Un couple (U_i, ϕ_i) est appelé *carte* et l'ensemble des cartes forment un *atlas*.
- On peut demander seulement que les $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^k ; cela définit alors une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k . De même, on peut demander que ces difféomorphismes soient analytiques réels (ce qui définit la notion de variété analytique réelle)
- Dans la suite, on dira simplement variété différentielle pour parler de variété lisse.
- Sur une telle variété, le calcul différentiel (\mathcal{C}^∞ ou \mathcal{C}^k) est possible : si U désigne un ouvert de M , on dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^∞ si pour toute carte (U_i, ϕ_i) , la fonction $f \circ \phi_i^{-1}$ sur l'ouvert $\phi_i(U \cap U_i)$ (de \mathbb{R}^n) est de classe \mathcal{C}^∞ .
- On définit aussi la notion d'application \mathcal{C}^∞ d'une variété dans une autre : si M et N sont deux variétés, une application $f : M \rightarrow N$ est \mathcal{C}^∞ si elle est continue et si pour toutes cartes (U, ϕ) et (V, ψ) de M et N respectivement, l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ est \mathcal{C}^∞ . Cela permet ensuite de définir la notion de difféomorphisme de variétés.
- Si M et N sont deux variétés de dimension m et n , l'espace topologique produit $M \times N$ est muni de manière naturelle d'une structure de variété dont la dimension est $m + n$: si les cartes (U_i, ϕ_i) forment un atlas de M et les cartes (V_j, ψ_j) forment un atlas de N , la famille de cartes $(U_i \times V_j, (\phi_i, \psi_j))$ forme un atlas de $M \times N$.
- Tout ouvert de \mathbb{R}^n est une variété différentielle réelle.

Définition Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $N \subset \mathbb{R}^d$ est une *sous-variété* \mathcal{C}^∞ de dimension m si en tout point $x_0 \in N$, il existe un voisinage W de x_0 et un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $f : W \rightarrow U$ sur un ouvert $U \ni 0$ de \mathbb{R}^d qui envoie x_0 sur 0 et telle que $f(N \cap W) = U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m)$ (où l'on a identifié \mathbb{R}^d à $\mathbb{R}^{d-m} \times \mathbb{R}^m$).

Remarque : Une telle définition définit un système d'équations de N au voisinage du point x_0 . Si on note $f = (f_1, \dots, f_d)$, alors $N \cap W = \{x \in W, \forall 1 \leq i \leq d - m, f_i(x) = 0\}$.

En outre, ce système est non-dégénéré au sens où les différentielles $(df_i)_{x_0}$ sont linéairement indépendantes car les matrices jacobiniennes associées correspondent aux lignes de la matrice jacobienne de f qui est inversible.

Par exemple, la sphère S^n est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} .

Définition Un *groupe de Lie réel* (respectivement *complexe*) est un groupe topologique muni d'une structure de variété différentielle réelle (respectivement complexe) telle que les opérations de multiplication et de passage à l'inverse sont \mathcal{C}^∞ .

On dit qu'un groupe de Lie est de dimension n s'il est de dimension n en tant que variété différentielle.

Exemples :

- $GL(n, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie de dimension $2n^2$; pour le voir, on identifie $M(n, \mathbb{C})$ à \mathbb{R}^{2n^2} et on observe que $GL(n, \mathbb{C})$ est un ouvert de $M(n, \mathbb{C})$.

A ce stade, on a donc montré la structure de variété différentielle.

Ensuite, la multiplication matricielle est polynomiale en les entrées des matrices à multiplier, donc l'application : $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), (A, B) \mapsto AB$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

En écrivant ensuite pour $A \in GL(n, \mathbb{C}), A^{-1} = (\det A)^{-1} {}^t \text{Com}(A)$, on voit que le passage à l'inverse correspond à une fraction rationnelle en les entrées de la matrice dont le dénominateur ne s'annule pas ; donc l'application "prendre l'inverse" est aussi \mathcal{C}^∞ .

- $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe de Lie.

7.1.2 Algèbre de Lie

On prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition Une \mathbb{K} -algèbre de Lie \mathfrak{g} est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une application \mathbb{K} -bilinéaire

$$[\cdot, \cdot] : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

appelée *crochet de Lie* telle que :

- $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$ (*antisymétrie*)
- $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (*identité de Jacobi*).

Remarque :

- La propriété d'antisymétrie implique $\forall x \in \mathfrak{g}, [x, x] = 0$ car \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2.
- Toute algèbre de Lie est évidemment une algèbre.

Définition Un *morphisme de \mathbb{K} -algèbres de Lie* $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est une application \mathbb{K} -linéaire telle que $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Exemples fondamentaux d'algèbres de Lie :

- Tout \mathbb{K} -espace vectoriel peut être muni d'une structure de \mathbb{K} -algèbre de Lie en prenant pour crochet de Lie l'application nulle. Une telle algèbre de Lie est dite *commutative*.
- Toute \mathbb{K} -algèbre associative A peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie en prenant pour crochet de Lie :

$$A \times A \rightarrow A \\ (x, y) \mapsto [x, y] = xy - yx$$

En particulier, puisque $M(n, \mathbb{C})$ est une \mathbb{C} -algèbre associative (due au produit matriciel), $M(n, \mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

De même, si V désigne un \mathbb{C} -espace vectoriel, l'ensemble $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ des endomorphismes de V hérite de sa structure d'algèbre associative (due à la composition des applications) une structure naturelle d'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(V)$.

- L'ensemble des dérivations d'une \mathbb{C} -algèbre A (c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires D de A dans A telles que $\forall x, y \in A, D(xy) = D(x)y + xD(y)$) peut être aussi muni d'une structure d'algèbre de Lie en prenant le crochet de Lie $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ (où on note par exemple D_1D_2 pour la composition des opérateurs D_1 et D_2). On vérifie seulement que $[D_1, D_2]$ est encore une dérivation : si $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](xy) &= D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) \\ &= D_1(D_2(x)y + xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y + xD_1(y)) \\ &= D_1(D_2(x)y) - D_2(D_1(x)y) + D_1(xD_2(y)) - D_2(xD_1(y)) \\ &= D_1(D_2(x))y + D_2(x)D_1(y) - D_2(D_1(x))y - D_1(x)D_2(y) \\ &\quad + D_1(x)D_2(y) + xD_1(D_2(y)) - D_2(x)D_1(y) - xD_2(D_1(y)) \\ &= (D_1D_2(x) - D_2D_1(x))y + x(D_1D_2(y) - D_2D_1(y)) \\ &= [D_1, D_2](x)y + x[D_1, D_2](y). \end{aligned}$$

Définition Etant données une algèbre de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{h} une partie de \mathfrak{g} , on dit que \mathfrak{h} est une *sous-algèbre de Lie* de \mathfrak{g} si :

- \mathfrak{h} est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}
- $\forall x, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}$.

Par exemple, l'ensemble des dérivations d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , notée $D(\mathfrak{g})$, forme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

En effet, puisqu'une dérivation est un endomorphisme d'espace vectoriel, $D(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Ensuite, l'endomorphisme nul de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est une dérivation et si $f, g \in D(\mathfrak{g})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)([x, y]) &= f([x, y]) + \lambda g([x, y]) \\ &= [f(x), y] + \lambda[g(x), y] + [x, f(y)] + \lambda[x, g(y)] \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ sont des dérivations.}) \\ &= [f(x) + \lambda g(x), y] + [x, f(y) + \lambda g(y)] \quad (\text{bilinéarité du crochet de Lie}) \\ &= [(f + \lambda g)(x), y] + [x, (f + \lambda g)(y)]. \end{aligned}$$

Cela montre que $D(\mathfrak{g})$ est un sous-espace vectoriel.

Enfin, si $f, g \in D(\mathfrak{g})$, on a vu plus haut que $[f, g] \in D(\mathfrak{g})$.

Proposition 43 Avec les notations précédentes, l'application adjointe de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} définie par :

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\rightarrow D(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto (ad(x) : y \mapsto [x, y]) \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration L'identité de Jacobi donne tout de suite que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $ad(x)$ est une dérivation de \mathfrak{g} . Ainsi, ad est bien définie.

Ensuite, ad est clairement linéaire et pour tout $(x, y, z) \in \mathfrak{g}^3$,

$$\begin{aligned} (ad([x, y]))(z) &= [[x, y], z] \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \quad (\text{Jacobi}) \\ &= ad(x)([y, z]) - ad(y)[x, z] \\ &= (ad(x)ad(y) - ad(y)ad(x))(z) \\ &= [ad(x), ad(y)](z). \end{aligned}$$

7.1.3 L'application exponentielle

Définition Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G est la donnée d'un homomorphisme continu $\mathbb{R} \rightarrow G$.

Sur l'algèbre de Banach $(M(n, \mathbb{C}), \|\cdot\|)$, où $\|(a_{ij})\| = \frac{1}{n} \sup_{i,j} |a_{ij}|$, on définit aussi comme d'habitude l'application exponentielle par $\forall X \in M(n, \mathbb{C}), \exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$. L'exponentielle est à valeurs dans $GL(n, \mathbb{C})$.

Proposition 44 Pour tout $X \in M(n, \mathbb{C})$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto \exp(tX) \end{aligned}$$

définit un sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{C})$.

Démonstration Si $t, u \in \mathbb{R}$, alors tX et uX commutent, donc $\exp((t+u)X) = \exp(tX) \exp(uX)$.

La continuité de l'application considérée est évidente. □

Remarque : Tous les sous-groupes à un paramètre de $GL(n, \mathbb{C})$ sont de cette forme. La preuve sera donnée dans le lemme 12 dans le cas $n = 1$.

7.1.4 Espace tangent et champs de vecteurs invariants à gauche

Soit M une variété différentielle et m un point de M . On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires (U, f) où U est un voisinage ouvert de m et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ par : $(U, f) \mathcal{R}(V, g) \stackrel{(déf)}{\iff} \exists W$ voisinage ouvert de m tel que $W \subset U \cap V$ et $f|_W = g|_W$.

Définition Avec les notations introduites ci-dessus, un germe de fonctions en m est une classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} .

On note \mathcal{O}_m l'ensemble des germes de fonctions en m .

Remarque : Dans la suite, on confondra une classe d'équivalence avec un de ses représentants.

Proposition 45 \mathcal{O}_m est muni d'une structure d'anneau héritée de \mathbb{R} .

Définition Une dérivation locale de \mathcal{O}_m est une application $\Phi : \mathcal{O}_m \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall f, g \in \mathcal{O}_m, \Phi(fg) = f(m)\Phi(g) + g(m)\Phi(f)$.

Définition L'ensemble des dérivations locales de \mathcal{O}_m forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} appelé espace tangent à M en m et noté $T_m(M)$.

Les éléments de $T_m(M)$ sont appelés vecteurs tangents.

Proposition 46 Si on se donne M une variété de dimension n , $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées locales au voisinage de m , et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m) \end{aligned}$$

est une dérivaison locale de \mathcal{O}_m .

Réciproquement, toute dérivaison locale de \mathcal{O}_m est obtenue de cette manière.

Conséquence : Un vecteur tangent au sens de la définition précédente est un élément tel que décrit dans la première partie de la proposition.

Définition Un champ de vecteurs sur une variété différentielle M est une application \mathcal{C}^∞ qui à tout point m de M associe un vecteur tangent $\Phi_m \in T_m(M)$. Cela signifie que si x_1, \dots, x_n sont des coordonnées locales sur un ouvert $U \subset M$, alors il existe des fonctions $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que : $X_m = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Proposition 47 Il y a une correspondance bijective entre les champs de vecteurs sur une variété différentielle M et les dérivations de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions \mathcal{C}^∞ de M dans \mathbb{R} .

Démonstration A un champ de vecteurs $X : m \mapsto X_m$ sur une variété différentielle M , on associe d'abord une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ de la manière suivante.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on définit

$$\begin{aligned} \Psi_X(f) : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ m &\mapsto X_m(f), \end{aligned}$$

où l'on évalue bien évidemment X_m en le germe de f en m .

On se donne des coordonnées locales x_i définies sur un ouvert de carte U . Alors $\Psi_X(f)$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ car d'une part, il existe des fonctions a_i de $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ telles que $\forall m \in U, X_m = \sum_i a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et d'autre part, puisque $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$,

la fonction $m \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(m)$ est aussi \mathcal{C}^∞ .

On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \Psi_X : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \Psi_X(f) \end{aligned}$$

qui est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$:

– Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tout $m \in M$,

$$\begin{aligned} \Psi_X(\alpha f + g)(m) &= X_m(\alpha f + g) \\ &= \alpha X_m(f) + X_m(g) && \text{car } X_m \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} \\ &= \alpha \Psi_X(f)(m) + \Psi_X(g)(m) \\ &= (\alpha \Psi_X(f) + \Psi_X(g))(m), \end{aligned}$$

d'où la \mathbb{R} -linéarité de Ψ_X .

– Le calcul

$$\begin{aligned} \Psi_X(fg)(m) &= X_m(fg) \\ &= f(m)X_m(g) + g(m)X_m(f) && \text{car } X_m \text{ est une dérivation locale} \\ &= f(m)\Psi_X(g)(m) + g(m)\Psi_X(f)(m) \\ &= (f\Psi_X(g) + g\Psi_X(f))(m) \end{aligned}$$

montre alors que Ψ_X est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

A ce stade, on a donc défini une application Ψ de l'ensemble des champs de vecteurs sur M vers l'ensemble des dérivations de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ qui à un champ de vecteurs X associe la dérivation $\Psi_X : f \mapsto (m \mapsto X_m(f))$.

Il faut encore montrer que Ψ est bijective.

On fixe alors D une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et on montre qu'il existe un unique champ de vecteurs X tel que $\Psi_X = D$.

Soit $m \in M$. On définit⁶ :

$$\begin{aligned} X_m : \mathcal{O}_m &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto D(f)(m). \end{aligned}$$

Il faut voir que cette fonction est bien définie ; autrement dit, si on se donne deux représentants f et g d'un même germe de \mathcal{O}_m , il faut voir que $D(f)(m) = D(g)(m)$.

La fonction définie étant linéaire, il suffit de voir que si le germe de f en m est nul, $D(f)(m) = 0$.

Or, si f est le germe nul en m , cela signifie qu'il existe un voisinage ouvert de m dans M sur lequel f est identiquement nul. Alors il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ tel que $g(m) = 0$ et $f = gf$ sur M .

Mais alors, $D(f)(m) = D(gf)(m) = g(m)D(f)(m) + f(m)D(g)(m) = 0$ et on a montré ainsi que X_m est bien définie.

X_m est une dérivation locale de \mathcal{O}_m grâce à la propriété de dérivation de D .

On définit enfin $X : m \mapsto X_m$ et on se donne x_1, \dots, x_n des fonctions coordonnées locales sur un ouvert U de M . On sait en outre par caractérisation des dérivations locales que pour $m \in U$ donné, il existe des réels $a_i(m)$ uniquement déterminés tels

que $X_m = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Il reste simplement à voir (pour obtenir un champ de vecteurs uniquement déterminé) que les a_i

sont des fonctions \mathcal{C}^∞ ; cela résulte du fait que les $D(x_j)^7$ sont \mathcal{C}^∞ (pour $1 \leq j \leq n$) et du calcul suivant :

$$\text{Pour } 1 \leq j \leq n, D(x_j)(m) = X_m(x_j) = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i(m) \delta_{i,j} = a_j(m). \quad \square$$

Conséquence : Si X et Y désignent deux champs de vecteurs de M , on peut les voir comme des dérivations de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. On a vu précédemment que le crochet de Lie $[X, Y] = XY - YX$ définit une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$; par conséquent on peut définir le champ de vecteurs $[X, Y]$.

Proposition 48 Soit G un groupe de Lie. Si $g \in G$, alors l'application $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme et induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{L}_g : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$.

Démonstration Comme G est un groupe de Lie, l'application $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ est \mathcal{C}^∞ , il en va donc de même de l'application partielle L_g (et cela pour tout g). On voit ensuite que $L_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ L_{g^{-1}} = Id_G$.

L_g réalise donc un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de G sur lui-même.

On pose alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g : T_h(G) &\rightarrow T_{gh}(G) \\ D &\mapsto \left((f, U_f) \mapsto D \left(\begin{array}{l} g^{-1}U_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(gx) \end{array} \right) \right). \end{aligned}$$

\mathcal{L}_g est bien définie.

En effet, si f est un germe de \mathcal{O}_{gh} , il existe U_f ouvert de G qui contient gh . Alors d'après la première partie de la proposition, $g^{-1}U_f$ est un ouvert qui, de plus, contient h . Donc, toujours d'après la première partie de la proposition, $x \mapsto f(gx)$ constitue un germe de \mathcal{O}_h .

On vérifie aussi sans problème que pour tout $D \in T_h(G)$, $\mathcal{L}_g(D)$ est une dérivation locale de \mathcal{O}_{gh} . □

Définition On dit qu'un champ de vecteurs $X : t \mapsto X_t$ sur G est invariant à gauche si pour tout $(g, h) \in G \times G$, $\mathcal{L}_g(X_h) = X_{gh}$.

Remarque : L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G forme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension la dimension de G en tant que variété.

Proposition 49 Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathfrak{g} des champs de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie G est stable sous l'action du crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ au sens de la conséquence de la proposition 47 et forme ainsi une algèbre de Lie pour $[\cdot, \cdot]$.

De plus, si $X_0 \in T_e(G)$, où e désigne l'élément neutre de G , il existe un unique champ de vecteurs invariant à gauche tel que X_0 soit le vecteur tangent à G en e (c'est-à-dire $X_e = X_0$).

6. La notation $D(f)$ employée n'est pas bien définie dans la mesure où le représentant f n'est défini que localement au voisinage de m .

7. Là encore, on s'autorise cette notation pas vraiment définie puisque D s'applique en des éléments de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et que les x_j ne sont définis que sur U .

Démonstration Concernant la deuxième partie de la proposition, il s'agit de voir que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e(G) \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

est bijective.

Si $X_0 \in T_e(G)$, on définit :

$$\begin{aligned} X : G &\rightarrow \{T_g(G), g \in G\} \\ g &\mapsto X_g = \mathcal{L}_g(X_0). \end{aligned}$$

X est un champ de vecteurs qui vérifie pour tout $(g, h) \in G \times G$, $\mathcal{L}_g(X_h) = \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_h(X_0)) = \mathcal{L}_{gh}(X_0) = X_{gh}$.

Le champ de vecteurs X est donc invariant à gauche et vérifie $X_e = \mathcal{L}_e(X_0) = X_0$.

Cela prouve que $\Phi(X) = X_0$, donc que Φ est surjective.

Si on se donne X et Y deux champs de vecteurs invariants à gauche, alors en particulier, tout vecteur tangent doit satisfaire $X_g = \mathcal{L}_g(X_e)$. Mais alors si $X_e = Y_e$, il vient $\forall g \in G$, $X_g = Y_g$ et finalement $X = Y$; d'où l'injectivité de Φ .

7.1.5 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Définition On appelle algèbre de Lie d'un groupe de Lie G , et on note $Lie(G)$, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G invariants à gauche.

Remarque : $Lie(G)$ s'identifie à $T_e(G)$ d'après la proposition précédente.

Proposition 50 Dans le cas où G est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$, $\{X \in M(n, \mathbb{C}), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ qui coïncide avec $Lie(G)$.

Cette caractérisation permet par exemple de déterminer les algèbres de Lie associées aux groupes linéaires classiques.

Notons maintenant : $\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), X + {}^t\bar{X} = 0\}$ et $\mathfrak{su}(n) := \{X \in \mathfrak{u}(n), \text{tr}X = 0\}$.

$\mathfrak{u}(n)$ est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $M(n, \mathbb{C})$, qui est stable sous l'action du crochet de Lie défini sur $M(n, \mathbb{C})$ ($\mathfrak{u}(n)$ est donc une \mathbb{R} -algèbre de Lie).

$\mathfrak{su}(n)$ est une \mathbb{R} -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{u}(n)$.

Proposition 51 On a les égalités entre algèbres de Lie suivantes :

- $Lie(GL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$
- $Lie(U(n)) = \mathfrak{u}(n)$
- $Lie(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)$

Démonstration Il est clair que $Lie(GL(n, \mathbb{C})) = M(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Montrons la deuxième égalité.

Si $X \in \mathfrak{u}(n)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, {}^t\bar{X} = -tX$. Puis en prenant l'exponentielle, il vient $\forall t, \exp({}^t\bar{X}) = \exp(tX)^{-1}$, c'est-à-dire finalement (puisque l'application $M \mapsto {}^t\bar{M}$ de $M(n, \mathbb{C})$ dans $M(n, \mathbb{C})$ est continue), ${}^t\bar{\exp(tX)} \exp(tX) = I_n$.

Ainsi $\exp(tX) \in U(n)$. Donc $X \in Lie(U(n))$.

Réciproquement, si $X \in Lie(U(n))$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I_n &= {}^t\bar{\exp(tX)} \exp(tX) \\ &= (I_n + {}^t\bar{X} + \frac{1}{2}{}^t\bar{X}^2 + \dots)(I_n + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \dots) \\ &= I + t({}^t\bar{X} + X) + \frac{1}{2}t^2({}^t\bar{X}^2 + 2{}^t\bar{X}X + {}^tX^2) + \dots \end{aligned}$$

Puisque cela est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, chaque coefficient dans cette série de Taylor, hormis le premier terme, doit s'annuler. En particulier ${}^t\bar{X} + X = 0$ et $X \in \mathfrak{u}(n)$.

Pour montrer la troisième égalité, on utilise l'égalité $\exp(\text{tr}M) = \det \exp M$, valable pour toute matrice M de $M(n, \mathbb{C})$ (cette dernière égalité se montre en trigonalisant M). \square

7.2 Le groupe unitaire

Dans cette section, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse plus particulièrement au groupe de Lie $U(n)$. On notera I_n l'élément neutre du groupe multiplicatif $U(n)$.

7.2.1 Propriétés générales

THÉORÈME 7.1 —

Toute matrice unitaire est diagonalisable avec une matrice de passage unitaire et des valeurs propres de module 1.

Démonstration Prenons $g \in U(n)$. En tant que matrice à coefficients complexes, g est trigonalisable. Autrement dit, il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $t' = PgP^{-1}$ soit triangulaire supérieure.

Le procédé de Gram-Schmidt donne l'existence de t triangulaire supérieure et u unitaire telles que $P = tu$ (évidemment t est aussi inversible).

Alors, il vient $(tu)g(tu)^{-1} = t'$, puis $ugu^{-1} = t^{-1}t't$. Ainsi, $d := ugu^{-1}$ est unitaire et triangulaire supérieure. On montre

alors que d est diagonale. En effet, la première colonne de d correspond à un vecteur colonne de norme 1 du type : $\begin{pmatrix} \otimes \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nécessairement, l'élément non nul est de module 1. Ensuite, les éléments de la première ligne de d forment un vecteur ligne de norme 1 dont la première composante est déjà de module 1 (de ce qui précède). On en conclut que la première ligne de d s'écrit $(d_1, 0, \dots, 0)$ où $|d_1| = 1$. On poursuit le raisonnement sur la deuxième colonne de d et de proche en proche, on montre finalement que d est diagonale avec pour éléments diagonaux des nombres complexes de module 1. \square

Remarque : Il découle alors par exemple du théorème précédent que $U(n)$ est connexe par arcs, donc aussi connexe.

En effet, si on se donne $x \in U(n)$, il existe alors P_x unitaire et des réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ telle que $x = P_x \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) P_x^{-1}$. On définit alors

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0, 1] &\rightarrow U(n) \\ t &\mapsto P_x \text{diag}(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n}) P_x^{-1}. \end{aligned}$$

Evidemment, γ_x est bien à valeurs dans $U(n)$, continue et $\begin{cases} \gamma_x(0) = I_n \\ \gamma_x(1) = x \end{cases}$.

Si on a aussi $y \in U(n)$, l'application continue

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow U(n) \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_x(1 - 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_y(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

vérifie alors $\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$. D'où la connexité par arcs de $U(n)$.

7.2.2 Tore du groupe unitaire

Définition Un tore compact est un groupe de Lie abélien, compact et connexe.

Un tore maximal d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie qui est un tore compact maximal au sens de l'inclusion.

Par exemple, $\mathbb{T} := U(1) = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\}$, muni de la topologie induite est un tore.

Le sous-groupe T de $U(n)$ des matrices diagonales est aussi un tore : en effet, il est isomorphe en tant que groupe topologique à \mathbb{T}^n . C'est aussi un tore maximal de $U(n)$. En effet, en notant :

$$T_k = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_k & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, |t_1| = \dots = |t_k| = 1 \right\},$$

on obtient une suite strictement croissante de tores pour l'inclusion : $T_1 \subsetneq T_2 \subsetneq \dots \subsetneq T_n = T$, avec des dimensions en tant que variétés strictement croissantes.

Le sous-groupe T est bien évidemment un sous-groupe de Lie abélien, connexe et compact.

Supposons que T ne soit pas maximal. Alors il existe un sous-groupe de Lie compact, connexe, abélien M qui contient strictement T .

Or tout élément $x \in M$ commute avec tout élément de M (car M est abélien), donc avec tout élément de T . En particulier, en prenant $z = \text{Diag}(z_1, \dots, z_n) \in T = U(1)^n$ avec les z_k ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) deux à deux distincts, on a $xz = zx$, ce qui donne

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, x_{ij}z_j = z_ix_{ij}.$$

Donc pour $i \neq j$, il vient $x_{ij} = 0$.

Cela montre que M est constitué uniquement de matrices diagonales, donc $M \subset T$; exclu!

Définition Le normalisateur de T est le sous-groupe de $U(n)$ défini par $N(T) := \{g \in U(n) | gTg^{-1} = T\}$.

Remarque : T est distingué dans $N(T)$, donc le quotient $W := N(T)/T$ est un groupe, appelé le groupe de Weyl.

Proposition 52 Le groupe de Weyl W est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

Démonstration $N(T)$ est l'ensemble des matrices unitaires dont chaque ligne et chaque colonne possède exactement un nombre complexe non nul.

En effet, d'une part, si $g = (g_{ij})_{i,j} \in N(T)$, alors en particulier $g \in U(n)$, donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |g_{ij}|^2 = 1$ et $\forall i \in$

$\llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n |g_{ij}|^2 = 1$, ce qui signifie que dans chaque colonne et dans chaque ligne, il y a au moins un élément non nul.

D'autre part, si dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de g se trouvent (au moins) deux éléments non nuls (disons g_{ij} et g_{ik} avec $j < k$), alors en choisissant $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T$ tel que $t_j \in U(1) \setminus \{1\}$ et $t_k \in U(1) \setminus \{1, t_j\}$, on aurait

$$L_i(gt) = \begin{bmatrix} g_{i1}t_1 & \cdots & g_{ij}t_j & \cdots & g_{ik}t_k & \cdots & g_{in}t_n \end{bmatrix}$$

Or si $g \in N(T)$, alors $gT = Tg$, donc $\exists t' \in T, gt = t'g$; en particulier on doit avoir $L_i(gt) = L_i(t'g)$.

Mais pour chaque $u = \text{diag}(u_1, \dots, u_n) \in T$, on a $L_i(ug) = \begin{bmatrix} u_i g_{i1} & \cdots & u_i g_{ij} & \cdots & u_i g_{ik} & \cdots & u_i g_{in} \end{bmatrix}$.

Or, par définition de t_j et t_k et puisque g_{ij} et g_{ik} sont supposés non nuls, on a $u_i g_{ij} \neq g_{ij} t_j$ ou $u_i g_{ik} \neq g_{ik} t_k$. Cela fournit la contradiction voulue.

On associe ensuite à chaque matrice M de $N(T)$ l'application $\phi(M)$ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même définie de la manière suivante : à chaque colonne j de M , on associe le numéro $i =: L_M(j)$ de la ligne de M contenant l'unique élément non nul M_{ij} se trouvant dans la colonne j . L'application $\phi(M)$ est clairement une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a construit ainsi une application

$$\begin{array}{ccc} \phi : N(T) & \rightarrow & \mathfrak{S}_n \\ M & \mapsto & \phi(M). \end{array}$$

ϕ est un homomorphisme de groupes. Si $M, M' \in N(T)$, on a :

$$\phi(MM') = \phi(M)\phi(M') \iff \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_{MM'}(j) = L_M(L_{M'}(j)).$$

On observe alors que le membre de droite de l'équivalence précédente est vérifié en effectuant le produit matriciel MM' .

Ensuite, l'application ϕ est surjective : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la matrice de permutation associée à σ (c'est-à-dire la matrice de terme générique $\delta_{i,\sigma(j)}$) est un élément du normalisateur de T qui a pour image σ par l'application ϕ .

Enfin, on voit que $T = \ker \phi$.

Par conséquent, ϕ induit un isomorphisme de groupes $\tilde{\phi} : N(T)/T \xrightarrow{\cong} \mathfrak{S}_n$. □

On considère maintenant l'action \cdot du groupe $U(n)$ sur lui-même par conjugaison. Cette action induit une action de $U(n)$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})$ des fonctions continues de $U(n)$ à valeurs dans \mathbb{C} . On note comme d'habitude $\mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$ l'ensemble des points fixes de $\mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})$ pour cette action.

On a aussi une action \diamond de \mathfrak{S}_n sur T par permutation des éléments diagonaux qui correspond à l'action du groupe de Weyl W (topologique en le munissant de la topologie discrète) sur T (d'après la proposition précédente). Plus précisément, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n$ et si P_σ est la matrice de permutation associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\sigma \diamond z = P_\sigma z P_\sigma^{-1} = \text{diag}(z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$. Cette action donne lieu à une action de W sur $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$; l'ensemble des points fixes pour cette dernière action est noté $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$.

Les ensembles $\mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$ et $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$ sont naturellement munis d'une structure de \mathbb{C} -algèbre.

THÉORÈME 7.2 —

1. $\forall x \in U(n), \exists t \in T, t \in U(n) \cdot x$. De plus, $T \cap U(n) \cdot x = W \diamond t$.

2. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)} &\rightarrow \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W \\ f &\longmapsto f|_T, \end{aligned}$$

alors bien définie, est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration 1. Si $x \in U(n)$, x est semblable à une matrice diagonale $t \in T$ avec une matrice de passage unitaire d'après le théorème 7.1. Cela se traduit par le fait que $t \in U(n) \cdot x$, par définition de \cdot .

De plus, si $t' \in T \cap U(n) \cdot x$, alors t' est semblable à x , donc a mêmes valeurs propres que x ; or c'est déjà le cas pour t . Donc à permutation près des éléments de t , $t = t'$; autrement dit $t' \in W \diamond t$. Réciproquement, si $t' \in W \diamond t$, il s'agit de voir que $t' \in U(n) \cdot x$. Or, par hypothèse t' et t sont semblables via une matrice de permutation (donc unitaire) et on sait que t et x sont semblables avec une matrice de passage unitaire. La relation de similitude étant transitive, il résulte que t' est semblable à x avec une matrice de passage unitaire. D'où le résultat.

2. Si $f \in \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$, $f|_T$ est continue sur T , muni de la topologie induite. Puisque f est une fonction constante sur les classes de conjugaison de $U(n)$ et $W \diamond t \subset U(n) \cdot t$, $f|_T$ est bien constante sur les orbites de l'action de W sur T . Cela montre que Φ est bien définie. Φ est évidemment un morphisme d'algèbres.

Supposons $f_1|_T = f_2|_T$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$. Alors pour $x \in U(n)$, $\exists t \in T, t \in U(n) \cdot x$.

Donc $\exists g \in G, t = gxg^{-1}$.

Or, $f_1(t) = f_2(t)$ par hypothèse, donc $f_1(gxg^{-1}) = f_2(gxg^{-1})$. Comme f_1 et f_2 sont des fonctions de classe, il vient donc finalement $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi $f_1 = f_2$ et Φ est injectif.

Examinons à présent la surjectivité de Φ .

On se donne $\psi \in \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^W$. ψ est une application continue, constante sur les classes d'équivalences de la relation \mathcal{R} définie sur T par $x \mathcal{R} y \iff \exists w \in W, y = wx$. On munit bien évidemment le quotient de T par la relation \mathcal{R} , noté usuellement T/W , de la topologie quotient.

Alors par la propriété universelle de la topologie quotient, ψ induit une application $\tilde{\psi} : T/W \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On introduit maintenant pour $z \in U(n)$ son polynôme caractéristique, que l'on écrit sous la forme $X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n$, les a_i étant des nombres complexes dépendant de z .

Cela fournit une application :

$$\begin{aligned} \gamma : U(n) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longmapsto (a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

En notant $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, en se souvenant que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et en exploitant la continuité du déterminant, on montre que chaque γ_i est une fonction de classe continue sur $U(n)$.

Si en particulier $z \in T$, z s'écrit sous la forme $z = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ avec les z_i de module 1 et dans ce cas, le polynôme

caractéristique de z est $\det(XI_n - z) = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$, ce qui se réécrit encore :

$\det(XI_n - z) = X^n - e_1(z_1, \dots, z_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n)$, où les e_i sont les fonctions symétriques élémentaires introduites au paragraphe 6.1.3.

L'application γ , restreinte au tore T , est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma|_T : T &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \text{diag}(z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (e_1(z_1, \dots, z_n), \dots, e_n(z_1, \dots, z_n)) \end{aligned}$$

Les coordonnées de $\gamma|_T(\text{diag}(z_1, \dots, z_n))$ étant des fonctions symétriques, il vient que $\gamma|_T$ est une fonction continue constante sur chaque W -orbite (on a vu que W est isomorphe à \mathfrak{S}_n).

De plus, si $z, z' \in T$ sont tels que $\gamma|_T(z) = \gamma|_T(z')$, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i(z_1, \dots, z_n) = e_i(z'_1, \dots, z'_n)$. Cela implique qu'à permutation près de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, $z_i = z'_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition de l'action de W sur T , cela veut donc dire que $z \mathcal{R} z'$.

En outre, on a $\gamma(U(n)) = \gamma(T)$: en effet, si $g \in U(n), \exists t \in T, t \in U(n) \cdot g$. Donc $\exists g' \in U(n), t = g'gg^{-1}$. Mais alors, $\gamma(g) = \gamma(g'^{-1}tg) = \gamma(t) \in \gamma(T)$.

Cette dernière remarque montre que $\gamma|_T : T \rightarrow \gamma(U(n))$ est surjective.

Par conséquent, d'après la propriété universelle de la topologie quotient, $\gamma|_T$ induit une application continue bijective $\tilde{\gamma}|_T : T/W \rightarrow \gamma(U(n))$.

$\gamma(U(n))$ est un sous-ensemble séparé de \mathbb{C}^n (car lui-même est séparé). Puisque T est compact, le quotient T/W est quasi-compact (car c'est l'image de la projection canonique (continue)).

Finalement, $\tilde{\gamma}|_T$ est une application continue bijective du quasi-compact T/W sur le séparé $\gamma(U(n))$, donc un homéomorphisme.

On pose alors $\Psi := \tilde{\psi} \circ \tilde{\gamma}|_T^{-1} \circ \gamma : U(n) \rightarrow \mathbb{C}$. Alors Ψ est continue comme composée d'applications continues; c'est une fonction de classe sur $U(n)$ car γ l'est et on a bien $\Psi|_T = \psi$. D'où Φ est surjectif.

7.2.3 La formule d'intégration de Weyl

On conserve les notations introduites dans le paragraphe précédent.

$T = T \times \{I_n\}$ est évidemment un sous-groupe du groupe topologique $U(n) \times T$ (muni de la topologie produit). Il y a donc une action de groupe topologique naturelle de T sur $U(n) \times T$ que l'on précise ci-dessous :

$$\begin{aligned} T \times (U(n) \times T) &\rightarrow U(n) \times T \\ (t, (g, t')) &\longmapsto (gt^{-1}, t') \end{aligned}$$

On peut alors considérer l'ensemble des orbites gT (où g décrit $U(n)$) pour cette action, noté comme d'habitude $\frac{U(n) \times T}{T}$, muni de la topologie quotient, et qui est isomorphe au groupe produit $U(n)/T \times T$ (puisque l'action définie ci-dessus n'est rien d'autre que le produit des actions de T sur $U(n)$ et de I_n sur T).

Pour la démonstration de la formule de Weyl, il est nécessaire d'introduire l'application

$$\begin{aligned} \phi : U(n)/T \times T &\rightarrow U(n) \\ (gT, t) &\longmapsto gtg^{-1} \end{aligned}$$

Lemme 9 ϕ est bien définie, continue et surjective.

Démonstration On définit

$$\begin{aligned} f : U(n) \times T &\rightarrow U(n) \\ (g, t) &\longmapsto gtg^{-1}. \end{aligned}$$

f est évidemment continue car le groupe $U(n)$ est topologique.

La surjectivité de f est une conséquence immédiate du théorème 7.1.

Si maintenant pour $g \in U(n)$ et $t \in T$, on a $(g, t) \simeq (g', t')$, alors $\exists t'' \in T$, $(g', t') = (gt''^{-1}, t)$ par définition de l'action de T sur $U(n) \times T$.

Alors

$$\begin{aligned} f(g', t') &= f(gt''^{-1}, t) \\ &= (gt''^{-1})t(t''g^{-1}) \\ &= g(t''^{-1}t t'')g^{-1} \\ &= gtg^{-1} && \text{car } t, t'' \text{ commutent puisque diagonales} \\ &= f(g, t). \end{aligned}$$

On vient de voir que f est constante sur les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence associée à l'action de T sur $U(n) \times T$.

f induit donc une application continue surjective de $\frac{U(n) \times T}{T}$ sur $U(n)$. On a donc aussi l'application continue surjective ϕ . \square

Le groupe topologique $U(n)$ est une variété différentielle (réelle); il s'agit en fait d'un groupe de Lie. On rappelle que son algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ qui correspond à l'espace tangent à $U(n)$ en l'élément neutre I_n est le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices antihermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$.

Le tore T est une sous-variété différentielle de $U(n)$. On notera \mathfrak{t} l'espace tangent $T_{I_n}(T)$ à T au point I_n qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{u}(n)$ (en fait une sous- \mathbb{R} -algèbre de Lie).

Proposition 53 L'espace vectoriel \mathfrak{t} est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients imaginaires purs.

Démonstration Comme T est un sous-groupe de $U(n)$, lui-même sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{t} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M} = -M \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \exp(itM) \in T\}$.

Comme à $t \in T$ fixé, l'application de $U(n)$ dans lui-même définie par $g \mapsto gt^{-1}$ est un difféomorphisme, l'action topologique du sous-groupe T sur $U(n)$ est une action différentiable. Il est clair que pour tout $x \in U(n)$, le stabilisateur de x pour cette action est réduit à $\{I_n\}$; autrement dit, l'action est libre.

Ensuite, étant donné que T est compact, l'action de T sur $U(n)$ est propre.

Il résulte de cela que l'action de T sur la variété différentielle $U(n)$ est différentiable, libre et propre. L'ensemble quotient $U(n)/T$ a donc une structure de variété différentielle (quotient). De plus l'espace tangent $T_{eT}(U(n)/T)$ peut être identifié à $T_e(U(n))/T_e(T) = \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}$.

Définition Pour tout $g \in U(n)$, la différentielle en I_n du difféomorphisme $h \mapsto ghg^{-1}$ de $U(n)$ dans lui-même est notée $Ad(g)$. Cela permet de définir l'application $Ad : U(n) \rightarrow GL(\mathfrak{u}(n))$ appelée représentation adjointe de $U(n)$.

Proposition 54 – $\forall g \in U(n), \forall X \in \mathfrak{u}(n), Ad(g)(X) = gXg^{-1}$.

– Pour $t \in T$, l'automorphisme $Ad(t)$ laisse fixe chaque élément de \mathfrak{t} .

On dispose ainsi d'une représentation quotient de T sur $\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}$, notée $t \mapsto Ad(t)_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}}$.

Démonstration – La première assertion est immédiate.

– On fixe $t \in T$. On considère la composition suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{u}(n) & \xrightarrow{Ad(t)} & \mathfrak{u}(n) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t} \\ X & \mapsto & tXt^{-1} & \mapsto & tXt^{-1} + \mathfrak{t} \end{array}$$

$\pi \circ Ad(t)$ est évidemment une application linéaire.

Si $X \in \ker \pi \circ Ad(t)$, alors $tXt^{-1} \in \mathfrak{t}$, puis X s'écrit $X = t^{-1}diag(i\theta_1, \dots, i\theta_n)t$, donc $X = diag(i\theta_1, \dots, i\theta_n)$ puisque t et $diag(i\theta_1, \dots, i\theta_n)$, étant deux matrices diagonales, commutent.

Par factorisation, on obtient donc un isomorphisme $f(t) : \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}$ tel que $f(t) \circ \pi = \pi \circ Ad(t)$.

On a ainsi une application $\rho : T \rightarrow GL(\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t})$ qui à t associe $f(t)$. Il faut montrer que ρ est un morphisme de groupes. Prenons pour cela $t, t' \in T$. Alors pour $x \in \mathfrak{u}(n)$,

$$\begin{aligned} \rho(tt')(\pi(x)) &= \pi \circ Ad(tt')(x) \\ &= \pi \circ (Ad(t) \circ Ad(t'))(x) \\ &= (\pi \circ Ad(t)) \circ Ad(t')(x) \\ &= (f(t) \circ \pi) \circ Ad(t')(x) \\ &= f(t) \circ (\pi \circ Ad(t'))(x) \\ &= f(t) \circ (f(t') \circ \pi)(x) \\ &= \rho(t) \circ \rho(t')(\pi(x)) \end{aligned}$$

et on a bien ce que l'on voulait.

Enfin, la continuité de l'application $T \times \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}$, qui à (t, x) associe $f(t)(x)$, résulte de la continuité de :

$$\begin{array}{ccccc} T \times \mathfrak{u}(n) & \rightarrow & \mathfrak{u}(n) & \rightarrow & \mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t} \\ (t, x) & \mapsto & txt^{-1} & \mapsto & \pi(txt^{-1}) \end{array}$$

On définit à présent l'application :

$$\begin{array}{ccc} J : T & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \det(Ad(t^{-1})_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} - Id_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}}) \end{array}$$

Lemme 10 1. J est à valeurs réelles ; plus précisément, $\forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n, J(diag(z_1, \dots, z_n)) = \prod_{k < l} |z_k - z_l|^2$.

2. $J(t)$ est le jacobien de ϕ en tout point (gT, t) avec $g \in U(n)$.

Démonstration 1. On fixe $t = diag(z_1, \dots, z_n) \in T$.

On sait que $\mathfrak{u}(n)$ est simplement un \mathbb{R} -espace vectoriel (il n'est pas stable par la multiplication par $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque). Pour calculer $J(t)$ dans une base convenable, on complexifie $\mathfrak{u}(n)$ de manière à obtenir un \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$; en fait on obtient même une \mathbb{C} -algèbre de Lie en étendant le crochet de Lie sur $\mathfrak{u}(n)$ (\mathbb{R} -bilinéaire) en un crochet de Lie \mathbb{C} -bilinéaire.

Une propriété essentielle est que $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. En outre, l'ensemble des matrices élémentaires $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$.

Le complexifié de \mathfrak{t} est un \mathbb{C} -espace vectoriel qui admet pour base $\{E_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$. Le \mathbb{C} -espace vectoriel quotient, qui est le complexifié de $\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}$, admet donc pour base $\mathcal{B} := \{E_{i,j} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, i \neq j\}$.

On peut donc à présent calculer le déterminant de $Ad(t^{-1})_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} - Id_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}}$ dans cette base.

Or, $\forall i \neq j$,

$$\begin{aligned} (Ad(t^{-1})_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} - Id_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}})(E_{ij} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) &= \begin{bmatrix} z_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & z_n^{-1} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} E_{ij} \begin{bmatrix} z_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & z_n & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} - E_{ij} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \\ &= (z_i^{-1}z_j - 1)E_{ij} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \\ &= (z_i^{-1}z_j - 1)(E_{ij} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

La matrice de l'application $(Ad(t^{-1})_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} - Id_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}})$ dans la base \mathcal{B} est donc diagonale. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} J(t) &= \prod_{i \neq j} (z_i^{-1} z_j - 1) \\ &= \prod_{i < j} (z_i^{-1} z_j - 1)(z_j^{-1} z_i - 1) \\ &= \prod_{i < j} (z_j - z_i)(z_j^{-1} - z_i^{-1}) \\ &= \prod_{i < j} (z_j - z_i)(\bar{z}_j - \bar{z}_i), \end{aligned}$$

les z_i étant des nombres complexes de module 1. Le résultat découle directement de la dernière égalité.

2. On fixe maintenant $(g, t) \in U(n) \times T$. On s'intéresse à la différentielle de l'application ϕ au point (gT, t) . On commence par la différentielle de

$$\alpha : \begin{array}{ccc} U(n) \times T & \rightarrow & U(n) \\ (g, t) & \mapsto & gtg^{-1} \end{array}$$

au point (g, t) qui est une application linéaire de $T_g(U(n)) \times T_t(T)$ dans $T_{gtg^{-1}}(U(n))$.

On regarde la composition :

$$\beta : \begin{array}{ccccc} U(n) \times T & \xrightarrow{(g, \cdot, t, \cdot)} & U(n) \times T & \xrightarrow{\alpha} & U(n) & \xrightarrow{gt^{-1}g^{-1}} & U(n) \\ (x, y) & \mapsto & (gx, ty) & \mapsto & (gx)(ty)(gx)^{-1} & \mapsto & gt^{-1}xyx^{-1}g^{-1} = \gamma(g)(\gamma(t^{-1})(x).y.x^{-1}), \end{array}$$

où $\gamma : U(n) \rightarrow \text{Diff}(U(n))$, $y \mapsto (x \mapsto yxy^{-1})$. L'application β permet de se ramener à des différentielles d'applications $\gamma(h)$ ($h \in U(n)$) au point I_n . On peut donc ainsi exprimer aisément la différentielle de α en (g, t) . Avec les notations introduites auparavant et en sachant que "la différentielle d'un produit est la somme des différentielles", il vient $d\alpha_{g,t}(X, Y) = Ad(g)(Ad(t^{-1})(X) + Y - X)$, soit encore, $d\alpha_{g,t}(X, Y) = Ad(g)((Ad(t^{-1}) - Id)(X) + Y)$. A partir de là, il n'est plus difficile de voir que la différentielle de ϕ au point (gT, t) est donnée par :

$$d\phi_{(gT, t)}(X + \mathfrak{t}, Y) = Ad(g)((Ad(t^{-1}) - Id)(X) + Y),$$

cette écriture ayant un sens (le membre de droite ne dépend pas du représentant de la classe $X + \mathfrak{t}$ choisi) car l'endomorphisme $Ad(t^{-1}) - Id$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{u}(n)$ est nul sur \mathfrak{t} (puisque t^{-1} ainsi que tout élément de \mathfrak{t} est diagonal).

On considère maintenant la somme directe : $\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}$. Par définition, le jacobien de ϕ en (gT, t) étant le déterminant de $d\phi_{(gT, t)}$ et comme le déterminant est multiplicatif, il vient

$$\text{Jac}_{(gT, t)}\phi = \det(Ad(g)) \det \left((Ad(t^{-1}) - Id)_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} \oplus Id_{\mathfrak{t}} \right).$$

En écrivant matriciellement l'application linéaire "somme directe" $(Ad(t^{-1}) - Id)_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} \oplus Id_{\mathfrak{t}}$ (diagonale par blocs), on obtient $\det((Ad(t^{-1}) - Id)_{\mathfrak{u}(n)/\mathfrak{t}} \oplus Id_{\mathfrak{t}}) = J(t)$.

Ensuite, l'application $g \mapsto \det Ad(g)$ est un morphisme continu de $U(n)$ dans \mathbb{R}^* , donc son image est un sous-groupe compact connexe de \mathbb{R}^* , donc est $\{1\}$. On obtient ainsi $\det Ad(g) = 1$ et finalement le résultat.

On introduit à présent l'ensemble $U(n)^{\text{reg}}$ des éléments réguliers de $U(n)$, constitué des matrices unitaires dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes.

On pose aussi $T^{\text{reg}} := T \cap U(n)^{\text{reg}}$.

Lemme 11 1. $U(n)^{\text{reg}}$ est un ouvert de $U(n)$; aussi, T^{reg} est un ouvert de T pour la topologie induite.

2. $\phi^{-1}(U(n)^{\text{reg}}) = (U(n)/T) \times T^{\text{reg}}$ et ϕ réalise un difféomorphisme local au-dessus de $U(n)^{\text{reg}}$.

3. $\forall g \in U(n)^{\text{reg}}, \text{Card}\{\phi^{-1}(\{g\})\} = |W| = n!$

Démonstration 1. On a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} M \in U(n)^{\text{reg}} &\iff \text{les valeurs propres de } M \text{ sont toutes distinctes} \\ &\iff \text{les racines (complexes) du polynôme caractéristique de } M \text{ sont toutes distinctes} \\ &\iff \text{le discriminant du polynôme caractéristique de } M \text{ est non nul.} \end{aligned}$$

Puisque le discriminant d'un polynôme P est un polynôme en les coefficients de P , la condition est donc ouverte.

2. Soit $(gT, t) \in \phi^{-1}(U(n)^{\text{reg}})$. Alors $\exists u \in U(n)^{\text{reg}}, gtg^{-1} = u$. Cela donne $t = g^{-1}ug$. En particulier, t et u ont même polynôme caractéristique, donc $t \in U(n)^{\text{reg}}$. Ainsi $t \in T^{\text{reg}}$. D'où $\phi^{-1}(U(n)^{\text{reg}}) \subset (U(n)/T) \times T^{\text{reg}}$. L'inclusion inverse se montre avec le même argument.

De plus, si $t \in T^{\text{reg}}$, $t = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ avec les z_i deux à deux distincts. Il en résulte que le déterminant de la différentielle de ϕ aux points (gT, t) , ($g \in U(n)$), qui est $J(t) = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$ est non nul. Le théorème d'inversion

locale montre alors que ϕ réalise un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de (gT, t) sur un voisinage ouvert de $\phi(gT, t)$ inclus dans $U(n)^{\text{reg}}$.

3. On prend $g' \in U(n)^{\text{reg}}$. On veut voir que g' a $n!$ antécédents par ϕ .

On sait qu'il existe $(xT, t) \in U(n)/T \times T^{\text{reg}}$ tel que $xtx^{-1} = g'$. On définit l'application

$$\xi : \begin{array}{ccc} W = N(T)/T & \rightarrow & \phi^{-1}(\{g'\}) \\ gT & \mapsto & (xg^{-1}T, gtg^{-1}). \end{array}$$

D'abord, ξ est bien définie : on vérifie que si $\exists t' \in T, h = t'g$, alors $(xh^{-1}T, hth^{-1}) = (xg^{-1}T, gtg^{-1})$.

Si $(x'T, t') \in \phi^{-1}(\{g'\})$, alors $g' = x't'x'^{-1}$. On pose $g := x'^{-1}x$. Alors d'une part, $g \in N(T)$. On détaille la justification ci-après.

Comme $gtg^{-1} = t' \in T$, v désigne un vecteur propre de t si et seulement si gv est un vecteur propre de t' (avec la même valeur propre). Or, $Sp(t) = Sp(gtg^{-1}) = Sp(t')$ et $t \in T^{\text{reg}}$. Par conséquent, les espaces propres sont de dimension 1. Si v désigne un vecteur propre de t , on a donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, tv = \lambda v.$$

Or, en notant $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ avec les t_i deux à deux distincts, le sous-espace propre de t associé à la valeur propre

$$t_j \text{ est donné par } E_{t_j}(t) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right), \text{ où le seul élément non nul est situé à la } j^{\text{ème}} \text{ ligne.}$$

La relation $gv = \lambda v$ fournit donc $g_{jj} = \lambda$ et $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. La colonne C_j de g contient donc un seul élément non nul. On en déduit que g est monomiale, c'est-à-dire $g \in N(T)$.

D'autre part, $gtg^{-1} = x'^{-1}xtx^{-1}x' = x'^{-1}g'x' = t'$. Donc $\xi(gT) = (x'T, t')$.

On a montré ainsi que ξ est surjective.

Enfin, si $g, h \in N(T)$ tels que $\xi(gT) = \xi(hT)$, alors en particulier $xg^{-1}T = xh^{-1}T$, donc $gT = hT$. L'application ξ est donc aussi injective.

Il résulte de cette étude que ξ est une bijection de W sur $\phi^{-1}(\{g'\})$. En particulier, $\text{Card}(\phi^{-1}(\{g'\})) = |W| = |\mathfrak{S}_n| = n!$. \square

THÉORÈME 7.3 (FORMULE D'INTÉGRATION DE WEYL) —

Si $f \in \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$, alors :

$$\int_{U(n)} f d\mu_{U(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \right) \prod_{k < l} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi}.$$

Démonstration $U(n)$ et T étant des groupes topologiques compacts, on peut considérer leurs mesures de Haar (normalisées) $\mu_{U(n)}$ et μ_T qui sont invariantes par translation à gauche (et à droite) par un élément de $U(n)$ pour la première et par un élément de T pour la seconde.

La mesure image de $\lambda_{U(n)}$ par la projection canonique $U(n) \rightarrow U(n)/T$ est une mesure borélienne régulière sur $U(n)/T$ que l'on notera $\lambda_{U(n)/T}$ et qui est invariante par multiplication à gauche par un élément de $U(n)$.

On admet que $\mu_{U(n)}((U(n)^{\text{reg}})^c) = 0$ et $\mu_T((T^{\text{reg}})^c) = 0$. On peut alors restreindre à $U(n)^{\text{reg}}$ (respectivement à T^{reg}) le domaine d'intégration d'une fonction continue sur $U(n)$ (resp. sur T) sans changer la valeur de l'intégrale.

Soit $f \in \mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$.

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} f d\mu_{U(n)} &= \int_{U(n)^{\text{reg}}} f d\mu_{U(n)} \\ &= \frac{1}{|W|} \int_{\phi^{-1}(U(n)^{\text{reg}}) = U(n)/T \times T^{\text{reg}}} f \circ \phi(gT, t) |Jac_{(gT, t)} \phi| (\lambda_{U(n)/T} \otimes \mu_T)(d(gT), dt). \end{aligned}$$

Or, $f \circ \phi(gT, t) = f(gtg^{-1}) = f(t)$ car on a supposé f centrale. Le théorème de Fubini donne alors que

$$\begin{aligned}
\int_{U(n)} f d\mu_{U(n)} &= \frac{1}{n!} \left(\int_{U(n)/T} 1 \cdot \lambda_{U(n)/T}(d(gT)) \right) \left(\int_{T^{reg}} f(t) J(t) \mu_T(dt) \right) \\
&= \frac{1}{n!} \left(\int_T f(t) J(t) \mu_T(dt) \right) \\
&= \frac{1}{n!} \int_T f(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \mu_T(d(z_1, \dots, z_n)) \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \right) \prod_{k < l} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi},
\end{aligned}$$

le passage de l'avant-dernière ligne à la dernière ligne étant justifié par le théorème de Fubini et par l'exemple avec lequel se termine le paragraphe 2.2.3.

7.2.4 Les caractères du tore

T est un groupe abélien car formé de matrices diagonales, donc ses représentations irréductibles sont de degré 1, en vertu du théorème 4.6. On notera $X^*(T)$ l'ensemble des caractères linéaires continus de T .

Lemme 12 *Pour tout homomorphisme de groupes continu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{at}$.*

Démonstration Puisque f est continue, sa partie réelle $\Re e(f)$ est aussi continue. Comme $f(0) = 1$,

$$\exists \eta > 0, \forall t \in]-\eta, \eta[, \Re e f(t) \geq \frac{1}{2}.$$

On choisit à présent ρ une fonction positive de classe \mathcal{C}^1 , définie sur \mathbb{R} , à support dans $[-\eta, \eta]$ et d'intégrale 1 (cela est toujours possible en traduisant et dilatant une fonction densité qui est déjà de classe \mathcal{C}^1).

Le produit de convolution $\rho * f$ (donnant intuitivement de la régularité aux fonctions) est alors de classe \mathcal{C}^1 et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\rho * f)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(t-u) du \\
&= f(t) \int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(-u) du.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\Re e \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(-u) du \right) &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u) \Re e(f(-u)) du \\
&= \int_{-\eta}^{\eta} \rho(u) \Re e(f(-u)) du \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \rho(u) du \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(-u) du \neq 0$.

Donc $t \mapsto f(t) = \frac{(\rho * f)(t)}{\int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(-u) du}$ est \mathcal{C}^1 .

On peut alors, à t fixé, dériver par rapport à s l'égalité $f(t+s) = f(t)f(s)$, ce qui donne $f'(t+s) = f(t)f'(s)$.

En particulier $s = 0$ donne que f vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f'(0)f(t)$.

Comme $f(0) = 1$, il vient finalement $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{f'(0)t}$.

Cela conclut la preuve avec $a = f'(0) \in \mathbb{C}$. □

Remarque : On aurait pu aussi considérer, à $a \neq 0$ fixé l'application $F : x \mapsto \int_x^{a+x} f(t) dt$ qui est de classe \mathcal{C}^1 car f est continue, puis remarquer que $F(x) = \int_0^a f(u+x) du$ et utiliser la propriété de morphisme de f . On voit alors que f est de classe \mathcal{C}^1 et on peut alors dériver comme précédemment.

Proposition 55 *L'application*

$$\Phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow X^*(T)$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \mapsto z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n} \right)$$

est bien définie et est bijective.

Démonstration Pour un n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ donné, l'application $\text{diag}(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$ est un homomorphisme de groupes de T dans \mathbb{C}^* qu'on a identifié à $GL(1, \mathbb{C})$. Cela prouve que Φ est bien définie.

Si $\Phi(a_1, \dots, a_n) = \Phi(b_1, \dots, b_n)$, alors $\forall \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \in T, z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n} = z_1^{b_1} \dots z_n^{b_n}$. Mais alors, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, en prenant

$z_j = 1$ pour $j \neq i$, il reste $\forall |z_i| = 1, z_i^{a_i - b_i} = 1$. En écrivant alors z_i sous la forme $e^{i\theta}$, il vient $\forall \theta \in \mathbb{R}, \theta(a_i - b_i) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

De cela, il reste $\forall t \in \mathbb{R}, t(a_i - b_i) \in \mathbb{Z}$. En prenant en particulier un irrationnel pour t , on voit que nécessairement $a_i - b_i = 0$. Cela montre l'injectivité de Φ .

Pour démontrer la surjectivité de Φ , on se ramène au cas $n = 1$ grâce à la proposition 17.

Il faut voir que $a \mapsto (z \mapsto z^a)$ (pour $a \in \mathbb{Z}$ et $z \in U(1)$) est surjective.

Soit $\phi : U(1) \rightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère linéaire continu de $U(1)$. Etant donné que ϕ est un morphisme de groupes continu, l'application

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto \phi(e^{it})$$

est aussi un morphisme de groupes continus comme composée de morphismes de groupes continus. Le lemme précédent donne donc l'existence de $\tilde{a} \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\phi}(t) = e^{\tilde{a}t}$.

En observant que $\tilde{\phi}$ est 2π -périodique, il vient $\tilde{a} \in i\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $a := -i\tilde{a} \in \mathbb{Z}$.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(e^{it}) = (e^{it})^a$ puis $\forall z \in U(1), \phi(z) = z^a$.

D'où le résultat. \square

Proposition 56 Soient $\rho : T \rightarrow GL(V)$ une représentation continue de T dans un espace vectoriel V de dimension finie k et χ_ρ son caractère. Alors il existe un polynôme P à coefficients entiers positifs et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que pour chaque $(z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n$,

$$\chi_\rho \left(\begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \right) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}.$$

Démonstration En vertu du théorème 3.2 et parce que les représentations irréductibles de T sont de degré 1, on peut

écrire : $\rho = \bigoplus_{l=1}^k \rho_l$ où les ρ_l sont des représentations linéaires continues de T de dimension 1 (qu'on identifie à des caractères linéaires).

Le caractère de la représentation ρ est alors donnée par $\chi_\rho = \sum_{l=1}^k \chi_{\rho_l}$.

La bijection de la proposition précédente permet d'associer de manière unique un n -uplet $(a_1(l), \dots, a_n(l)) \in \mathbb{Z}^n$ à chaque caractère linéaire χ_{ρ_l} .

Il résulte de cela : $\forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n$,

$$\chi_\rho(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{l=1}^k z_1^{a_1(l)} \dots z_n^{a_n(l)}.$$

On pose $m := - \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq l \leq k}} (\{a_i(l), a_i(l) < 0\} \cup \{0\}) \in \mathbb{N}$.

Alors, $\chi_\rho(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{1}{(z_1 \dots z_n)^m} \sum_{l=1}^k z_1^{a_1(l)+m} \dots z_n^{a_n(l)+m}$, avec tous les $a_i(l) + m \geq 0$.

Le résultat en découle. \square

7.2.5 Les caractères irréductibles du groupe unitaire

On se donne $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une suite finie décroissante d'entiers relatifs. Il existe alors une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = (\lambda_1 - m, \dots, \lambda_n - m)$. On définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \psi_\mu : \quad T &\rightarrow \mathbb{C} \\ \text{diag}(z_1, \dots, z_n) &\mapsto \frac{s_\lambda(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m} \end{aligned}$$

Proposition 57 *On a les propriétés suivantes concernant ψ_μ*

1. $\psi_\mu \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$.

$$2. \forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n, \psi_\mu(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{\begin{vmatrix} z_1^{\mu_1+n-1} & z_1^{\mu_2+n-2} & \dots & z_1^{\mu_n+0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^{\mu_1+n-1} & z_n^{\mu_2+n-2} & \dots & z_n^{\mu_n+0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{n-1} & z_1^{n-2} & \dots & z_1^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^{n-1} & z_n^{n-2} & \dots & z_n^0 \end{vmatrix}}.$$

Démonstration (1) découle immédiatement du fait que les fonctions de Schur sont des polynômes symétriques et du fait que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(n)})^m = (z_1 \dots z_n)^m$. Quant à (2), il s'agit simplement d'une réécriture de $\psi_\mu(\text{diag}(z_1, \dots, z_n))$ à partir de la définition des fonctions de Schur $s_\lambda = \frac{a_{\delta+\lambda}}{a_\delta}$ où $\delta = (n-1, \dots, 1, 0)$. \square

L'isomorphisme d'algèbres du théorème 7.2 donne des fonctions de classe χ_μ sur $U(n)$ dont les restrictions à T sont les ψ_μ .

On va prouver que les χ_μ sont les caractères irréductibles recherchés.

Proposition 58 *Soit ρ une représentation continue de dimension finie du groupe unitaire. Alors, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ à coefficients positifs et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que la restriction à T du caractère de ρ soit donnée par*

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n, \chi_\rho(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}.$$

Démonstration En tant que caractère d'une représentation, χ_ρ est un élément de $\mathcal{C}(U(n), \mathbb{C})^{U(n)}$. Donc d'après le théorème 7.2, $\chi_{\rho|T} \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$.

Ensuite, $\chi_{\rho|T} = \chi_{\text{Res}_T^{U(n)} \rho}$ et d'après la proposition 56,

$$\exists P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], \exists m \in \mathbb{N}, \forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n, \chi_{\text{Res}_T^{U(n)} \rho}(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}.$$

Enfin, $\chi_{\rho|T} \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$, donc $\chi_{\rho|T}$ est un point fixe pour l'action de \mathfrak{S}_n sur $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$. On voit ainsi, en utilisant l'injectivité de l'application qui, à la fonction polynomiale \tilde{Q} définie sur \mathbb{C}^n associée à un polynôme Q de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, associe la fonction polynomiale $\tilde{Q}|_T$ restreinte à $U(1)^n = T$, que P est aussi un point fixe pour l'action de \mathfrak{S}_n sur $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. \square

On rappelle qu'en tant que groupe topologique compact, $U(n)$ est associé au produit scalaire

$$\langle f|g \rangle_{U(n)} = \int_{U(n)} f \bar{g} d\mu_{U(n)}.$$

Proposition 59 *Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ sont deux suites décroissantes d'entiers relatifs, alors $\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = \delta_{\mu, \nu}$.*

Démonstration D'après la formule d'intégration de Weyl,

$$\begin{aligned} \langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} &= \int_{U(n)} \chi_\mu \overline{\chi_\nu} d\mu_{U(n)} \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \chi_\mu \left(\begin{matrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{matrix} \right) \overline{\chi_\nu \left(\begin{matrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{matrix} \right)} \left| \prod_{j < k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \right|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi}. \end{aligned}$$

Il résulte de la proposition précédente qu'il existe deux partitions λ et λ' et deux entiers naturels m et m' tels que $\forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n$, $\psi_\mu(z_1, \dots, z_n) = \frac{s_\lambda(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}$ et $\psi_\nu(z_1, \dots, z_n) = \frac{s_{\lambda'}(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^{m'}}$. Mais quitte à rajouter à chaque composante de λ la même différence $m' - m$ (en supposant $m' \geq m$), on peut toujours supposer $m = m'$. Puis, comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e^{i\theta_k} \overline{e^{i\theta_k}} = 1$, on a

$$\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} s_\lambda(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \overline{s_{\lambda'}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})} \prod_{j < k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \left| \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi} \right|.$$

Puis en utilisant que $a_\delta(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = \prod_{j < k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k})$ (déterminant de Vandermonde), il vient :

$$\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} a_{\lambda+\delta}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \overline{a_{\lambda'+\delta}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})} \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi}.$$

Ensuite, par définition, pour toute partition $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, $a_\pi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) z_1^{\pi_{\sigma(1)}} \dots z_n^{\pi_{\sigma(n)}}$. Finalement, après interversion des symboles \sum et \int , et en remarquant que les variables d'intégration sont séparées,

$$\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \epsilon(\sigma') \prod_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta_k((\lambda+\delta)_{\sigma(k)} - (\lambda'+\delta)_{\sigma'(k)})} \frac{d\theta_k}{2\pi} \right).$$

- 1^{er} cas : $\lambda = \lambda'$. Alors aussi $\lambda + \delta = \lambda' + \delta$ et donc $\forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = \lambda'_i$.
 Pour $\sigma = \sigma'$, on a donc $\forall 1 \leq k \leq n$, $e^{i\theta_k((\lambda+\delta)_{\sigma(k)} - (\lambda'+\delta)_{\sigma'(k)})} = 1$.
 Pour $\sigma \neq \sigma'$, $\exists 1 \leq k \leq n$, $\sigma(k) \neq \sigma'(k')$. Comme λ est une partition et δ est une partition strictement décroissante, $\lambda + \delta$ est aussi une partition strictement décroissante. En conséquence, $(\lambda + \delta)_{\sigma'(k)} \neq (\lambda + \delta)_{\sigma(k)}$.

En utilisant à présent $\int_0^{2\pi} e^{ia\theta_k} d\theta_k = \begin{cases} 2\pi & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$, il reste donc :

$$\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma = \sigma'} \epsilon(\sigma)^2 = \frac{1}{n!} \text{Card } \mathfrak{S}_n = 1.$$

- 2^e cas : $\lambda \neq \lambda'$, c'est-à-dire $\lambda + \delta \neq \lambda' + \delta$, soit encore $\exists i_0$, $(\lambda + \delta)_{i_0} \neq (\lambda' + \delta)_{i_0}$.
 Pour $\sigma = \sigma'$, on a $(\lambda + \delta)_{\sigma(\sigma^{-1}(i_0))} \neq (\lambda' + \delta)_{\sigma(\sigma^{-1}(i_0))}$.
 Donc, $\int_0^{2\pi} e^{i\theta_{\sigma^{-1}(i_0)}((\lambda+\delta)_{\sigma(\sigma^{-1}(i_0))} - (\lambda'+\delta)_{\sigma(\sigma^{-1}(i_0))})} = 0$, puis $\prod_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta_k((\lambda+\delta)_{\sigma(k)} - (\lambda'+\delta)_{\sigma(k)})} \frac{d\theta_k}{2\pi} \right) = 0$ puisque le produit comprend le terme avec $k = \sigma^{-1}(i_0)$ qui est nul.
 Pour $\sigma \neq \sigma'$, $\exists 1 \leq k \leq n$, $\sigma(k) \neq \sigma'(k')$. Si on avait $\forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\lambda' + \delta)_{\sigma'(l)} = (\lambda + \delta)_{\sigma(l)}$, alors comme $\lambda' + \delta$ et $\lambda + \delta$ sont strictement décroissantes, il viendrait nécessairement $\sigma'(l) = \sigma(l)$ pour tout l .
 Ainsi, $\exists l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\lambda' + \delta)_{\sigma'(l)} \neq (\lambda + \delta)_{\sigma(l)}$.

Mais alors, il vient aussitôt $\prod_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta_k((\lambda+\delta)_{\sigma(k)} - (\lambda'+\delta)_{\sigma(k)})} \frac{d\theta_k}{2\pi} \right) = 0$.

Par conséquent, $\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = 0$.

D'où le résultat. □

THÉORÈME 7.4 —

Les fonctions χ_μ forment exactement l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de $U(n)$ lorsque μ décrit l'ensemble des suites décroissantes formées de n entiers relatifs.

Démonstration Soient (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de $U(n)$ et χ_ρ le caractère (irréductible) associé. D'après la proposition 58, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$, $\forall (z_1, \dots, z_n) \in U(1)^n$,

$$\chi_\rho(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}.$$

P étant un polynôme symétrique, il se décompose sur les fonctions de Schur de la manière suivante : $P = \sum_{\lambda} c_{\lambda} s_{\lambda}$ où la somme porte sur l'ensemble des partitions de longueur n et les c_{λ} sont des entiers relatifs.

Ensuite, l'ensemble des partitions de longueur n est en bijection avec l'ensemble des suites décroissantes formées de n entiers

relatifs supérieurs à $-m$ via l'application $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \mu = (\lambda_1 - m, \dots, \lambda_n - m)$. Ainsi, en renommant c_λ par c_μ si λ et μ correspondent dans la bijection précédente :

$$\begin{aligned} \chi_\rho(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) &= \sum_{\lambda} c_\lambda \frac{s_\lambda(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m} \\ &= \sum_{\mu} c_\mu \chi_\mu(\text{diag}(z_1, \dots, z_n)) \end{aligned}$$

L'isomorphisme d'algèbres de la proposition 7.2 donne donc

$$\chi_\rho = \sum_{\mu} c_\mu \chi_\mu.$$

Maintenant, le théorème 4.1 affirme que $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle_{U(n)} = 1$. Autrement dit, en utilisant la proposition précédente,

$$\sum_{\mu} |c_\mu|^2 = 1.$$

De cela, on tire que tous les c_μ sont nuls sauf un qui vaut ± 1 . Ainsi, $\chi_\rho = \pm \chi_\mu$.

Le signe à garder est finalement $+$ car on observe que les restrictions de χ_ρ et de χ_μ au tore T sont toutes les deux données par des polynômes à coefficients entiers positifs. Pour $\chi_{\rho|T}$, la proposition 56 en est une preuve ; la définition de la fonction $\chi_{\mu|T} = \psi_\mu$ fait intervenir une fonction de Schur, qui est un polynôme à coefficients positifs d'après l'expression donnée par le théorème de Littlewood.

Ainsi $\chi_\rho = \chi_\mu$.

A ce stade, on a donc montré que l'ensemble des caractères irréductibles de $U(n)$ est inclus dans l'ensemble des χ_μ , où μ décrit l'ensemble des suites décroissantes de n entiers relatifs.

S'il existe une suite décroissante μ formée de n éléments de \mathbb{Z} telle que χ_μ n'est pas un caractère irréductible, alors χ_μ est une fonction de classe continue, non nulle (par définition), et on a pour toute suite décroissante ν de n entiers relatifs différente de μ , $\langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle_{U(n)} = 0$.

Mais alors, comme d'après ce qui précède, tout caractère irréductible de $U(n)$ est un χ_ν ($\nu \neq \mu$), on a que χ_μ est orthogonal à tous les caractères irréductibles de χ_ρ . Cela est en contradiction avec le théorème de Peter-Weyl.

Finalement, on a bien ce que l'on voulait montrer. □

Conclusion - Remerciements

Ce mémoire m'a permis de découvrir la théorie des représentations des groupes finis et compacts. L'étude des représentations de dimension finie d'un groupe donné passe avant tout par la détermination des caractères irréductibles de ce groupe. Pour cela, on est bien souvent, comme dans les cas du groupe symétrique et du groupe unitaire que j'ai étudiés, amené à manipuler des concepts et outils rattachés à différents domaines des mathématiques. On peut notamment être très admiratif devant l'efficacité des tableaux de Young qui permettent de démontrer sans grande peine des relations liant les familles de polynômes symétriques.

Je tiens aussi à remercier mon maître de mémoire, Pierre Baumann, qui a consacré beaucoup de temps à la relecture et à la correction du texte en me communiquant d'ailleurs plusieurs conseils de formulation et de rédaction. En outre, j'ai bénéficié d'explications claires et précises concernant certains points mathématiques importants (en relation intime mais aussi en marge avec le contenu du mémoire) sur lesquels les ouvrages n'insistent pas toujours.

* *

*

Références

- [1] Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, 1998.
- [2] Laurent Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*. Société mathématique de France, numéro 3.
- [3] Daniel Bump, *Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, numéro 225, Springer.
- [4] Hermann Weyl, *The classical groups, their invariants and representations*. Princeton, New Jersey, 1946.