

Mémoire de Deuxième année de Master

Xavier FRIEDERICH

Août 2017

AUTOUR DU PROBLEME DE KEPLER

*Mémoire sous la direction de
Charles FRANCES*

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Sommaire

Introduction	4
1 Éléments de géométrie symplectique et mécanique hamiltonienne.	5
1.1 Variétés symplectiques : définitions, propriétés élémentaires et exemples.	5
1.1.1 Définition et premières conséquences.	5
1.1.2 Le fibré cotangent d'une variété comme variété symplectique.	6
1.1.3 Feuilletage caractéristique d'une hypersurface d'un fibré cotangent.	7
1.1.4 Les morphismes symplectiques.	8
1.1.5 Le théorème de Darboux.	9
1.2 Champs de vecteurs hamiltoniens.	9
1.2.1 Produit intérieur, dérivée de Lie et champs de vecteurs.	10
1.2.2 Champs hamiltoniens.	12
1.3 Notion d'équivalence entre champs de vecteurs.	14
1.4 Crochets de Poisson : généralités et structure de Poisson sur l'ensemble des fonctions lisses sur une variété symplectique	15
1.5 Systèmes hamiltoniens, définition et écriture locale.	16
1.6 Le flot géodésique sur le fibré tangent à une variété pseudo-riemannienne.	17
1.7 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique.	18
1.8 Espaces homogènes symplectiques d'un groupe de Lie.	21
1.8.1 Définitions et propriétés fondamentales.	21
1.8.2 Structure symplectique sur les orbites coadjointes.	21
2 Systèmes intégrables et super-intégrables.	24
2.1 L'étude des systèmes complètement intégrables.	24
2.1.1 Définitions et exemples.	24
2.1.2 Propriété des systèmes intégrables et théorème d'Arnold-Liouville.	25
2.2 Systèmes intégrables au sens non-commutatif et bifeuilletages.	31
2.2.1 Définition, exemple et énoncé du théorème de Mischenko-Fomenko.	31
2.2.2 Bifeuilletages.	33
2.2.3 Énoncés équivalents et preuve du théorème de Mischenko-Fomenko.	34
3 Symétries d'un système hamiltonien et problème de Kepler.	39
3.1 Symétries d'un système hamiltonien.	39
3.2 Problème de Kepler ; symétries évidentes et nécessité de régularisation.	40
3.2.1 Présentation du problème de Kepler	40
3.2.2 Symétries évidentes du problème de Kepler.	41
3.2.3 Nécessité d'une régularisation des orbites de collision.	41
4 Géométrie du problème de Kepler et régularisation en petite dimension.	43
4.1 Le problème de Kepler comme système super-intégrable.	43
4.2 Régularisation en petite dimension de Levi-Civita avec une approche géométrique.	43
4.2.1 Topologie de l'espace des phases.	44
4.2.2 Plongement de l'espace des phases dans \mathbb{RP}^3 .	44
4.2.3 Lien avec l'application de Hopf et géométrie des trajectoires de Kepler.	45
4.2.4 Etablissement d'une équivalence entre le problème de Kepler considéré et le système hamiltonien géodésique sur $T_1^*S^2$.	48
4.2.5 Ensemble correspondant aux orbites de collision dans \mathbb{RP}^3 .	50
5 Régularisation du problème de Kepler de dimension n.	51
5.1 Une première régularisation des orbites de Kepler d'énergie négative : la régularisation de Moser.	51
5.1.1 Projection stéréographique et relevé aux fibrés cotangents.	51
5.1.2 La régularisation de Moser des niveaux d'énergie strictement négatifs.	52
5.1.3 Mise en évidence d'une symétrie cachée du problème de Kepler.	54
5.1.4 Limites de l'application de Moser.	55
5.2 La régularisation de Ligon-Schaaf.	55

5.2.1	L'application de Ligon-Schaaf comme adaptation de l'application de Moser.	55
5.2.2	$\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée et orbites de l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n	58
5.2.3	Bilan sur la régularisation de Ligon-Schaaf.	59
5.3	Extension à des systèmes hamiltoniens plus généraux.	60
6	Problème de Kepler et géométrie de l'univers d'Einstein.	61
6.1	La variété de Kepler T^+S^n comme espace de feuilles caractéristiques.	61
6.1.1	Variété d'Einstein et géométrie conforme.	61
6.1.2	Action de $O(2, n+1)$ sur un espace de feuilles construit à partir de la variété d'Einstein. . .	65
6.1.3	L'espace des feuilles comme espace homogène sous l'action de $O(1, n+1)$	66
6.2	Précision sur les groupes de symétries du problème de Kepler régularisé.	67
6.3	Une autre réduction symplectique, particulière à la variété de Kepler T^+S^3	68
6.3.1	Introduction d'une variété symplectique réduite.	68
6.3.2	L'algèbre de Lie $su(2, 2)$ ou $so(2, 4)$	69
6.3.3	La variété de Kepler T^+S^3 comme variété symplectique réduite.	71
	Conclusion et Remerciements	75

Introduction.

Ce mémoire constitue une approche géométrique moderne à un système hamiltonien spécifique, le problème de Kepler. Il s'agit d'un travail de synthèse qui est certes loin d'être exhaustif, mais qui présente les outils nécessaires pour en faire l'étude et dans lequel on reprend, reformule et complète les études menées jusqu'alors en ce qui concerne la géométrie de certains objets rattachés au problème de Kepler.

Le premier chapitre présente les notions fondamentales de la géométrie symplectique et le formalisme de la mécanique hamiltonienne indispensables pour la suite. Après l'introduction des systèmes hamiltoniens, on explique ce qu'est le flot géodésique qui s'avère être plus loin intimement lié au problème de Kepler. Les deux dernières sous-parties tissent un lien entre la théorie des groupes de Lie et la géométrie symplectique.

Dans le deuxième volet, on étudie la classe des systèmes intégrables ; on présente différents exemples et on en vient aux théorèmes majeurs d'Arnold-Liouville et de Mischenko-Fomenko.

Ensuite, la présentation du problème de Kepler et l'introduction des concepts de symétrie et régularisation fournissent la motivation de l'étude de ce système hamiltonien. On précise qu'on s'attachera essentiellement à l'étude du problème restreint aux niveaux d'énergie négative ; lorsqu'il y aura lieu de le faire, on fera simplement quelques remarques concernant les niveaux d'énergie positive.

La quatrième partie est consacrée essentiellement au problème de Kepler en petite dimension ; on en présente les aspects géométriques et topologiques ainsi qu'une première régularisation, due à Levi-Civita. C'est l'occasion, en outre, d'observer le comportement des orbites de collision suite à la régularisation.

Puis, on décrit deux procédés de régularisation en dimension quelconque : la régularisation de Moser, plutôt intuitive et qui repose sur la projection stéréographique classique, puis celle de Ligon et Schaaf, dont la construction est plus subtile mais qui a l'avantage d'être une vraie régularisation au sens de la définition précise que l'on donnera.

Le sixième chapitre est sans doute celui qui complète ou précise les articles traitant de la géométrie du problème de Kepler. Il constitue notamment une véritable approche géométrique fondée sur les propriétés de la variété d'Einstein et aboutit à une présentation de l'espace des phases du problème régularisé comme variété symplectique réduite. La dernière sous-partie traite le cas particulier de la dimension 3 et utilise un autre théorème de réduction symplectique.

Enfin les dernières pages de ce mémoire proposent une ouverture à l'étude des systèmes hamiltoniens à force centrale plus généraux, voire à leur régularisation.

1 Éléments de géométrie symplectique et mécanique hamiltonienne.

1.1 Variétés symplectiques : définitions, propriétés élémentaires et exemples.

1.1.1 Définition et premières conséquences.

Définition On appelle variété symplectique la donnée d'un couple (M, ω) où M désigne une variété différentielle et ω une 2-forme différentielle fermée ($d\omega = 0$) et partout non-dégénérée, c'est-à-dire

$$\forall p \in M, \forall x \in T_p M, (\forall y \in T_p M, \omega(x, y) = 0 \implies x = 0).$$

Remarque

Une telle forme différentielle ω est aussi appelée forme symplectique. □

Exemple

Pour tout $n \geq 1$, l'espace \mathbb{R}^{2n} muni de la 2-forme différentielle

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i},$$

où (x_1, \dots, x_{2n}) est un système de coordonnées de \mathbb{R}^{2n} est une variété symplectique. □

Lemme 1 Soit ϕ une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Alors n est pair et si A désigne la matrice de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^n ,

$$\exists P \in GL(n, \mathbb{R}), {}^t P A P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration

La matrice A définie dans l'énoncé est antisymétrique car ϕ l'est et inversible car ϕ est non-dégénérée.

L'égalité ${}^t A = -A$ implique en prenant le déterminant : $\det A = (-1)^n \det A$, ce qui montre bien que n est pair. On note $n = 2p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrons à présent la deuxième partie du lemme.

Prenons $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est non-dégénérée, il existe y_1 vecteur non-nul de \mathbb{R}^n tel que $\phi(y_1, x_1) \neq 0$. Quitte à multiplier y_1 par le scalaire $\frac{1}{\phi(y_1, x_1)}$, on peut supposer que $\phi(y_1, x_1) = 1$. Comme $\phi(x_1, x_1) = 0$, on a bien sûr y_1 et x_1 non-colinéaires.

Notons $\mathcal{P}_1 := \text{Vect}(x_1, y_1)$. On a alors

$$\text{Mat}_{(x_1, y_1)} \phi|_{\mathcal{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et ainsi $\phi|_{\mathcal{P}_1}$ est non-dégénérée. Autrement dit, si $\mathcal{P}_1^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathcal{P}_1, \phi(x, y) = 0\}$, on a $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_1^\perp = \{0\}$.

Comme ϕ est non-dégénérée, on a l'égalité $\dim \mathcal{P}_1 + \dim \mathcal{P}_1^\perp = n$ et ainsi d'après ce qui précède

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_1^\perp.$$

Puisque \mathbb{R}^n est de dimension finie, on a $\mathcal{P}_1^{\perp\perp} = \mathcal{P}_1$, donc $\mathcal{P}_1^\perp \cap \mathcal{P}_1^{\perp\perp} = \{0\}$, donc $\phi|_{\mathcal{P}_1^\perp}$ est non-dégénérée sur \mathcal{P}_1^\perp .

On se ramène ainsi au cas où p est changé en $p-1$.

Il existe donc $x_2, y_2 \in \mathcal{P}_1^\perp \setminus \{0\}$ tels que $\phi(y_2, x_2) = 1$ et notant $\mathcal{P}_2 := \text{Vect}(x_2, y_2)$, on a :

$$\mathcal{P}_1^\perp = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_2^\perp.$$

Continuant ainsi de proche en proche, on obtient finalement $n = 2p$ vecteurs $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p$ qui forment une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^n et p plans vectoriels \mathcal{P}_i , où $1 \leq i \leq p$, tels que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{P}_i$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'} \phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notant \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on obtient le résultat voulu. ■

Corollaire 1 *Si (M, ω) est une variété symplectique, alors la dimension de M est paire.*

Démonstration

Pour $m \in M$, le \mathbb{R} -espace vectoriel $T_m M$ isomorphe à $\mathbb{R}^{\dim M}$ est muni de la forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée ω_m . Le lemme précédent montre donc que $\dim M$ est un entier pair. ■

Remarque

Comme toute 2-forme différentielle sur une variété de dimension 2 est fermée, il s'ensuit que toute variété de dimension 2 orientable peut être munie d'une structure symplectique (il suffit de prendre pour forme symplectique une forme volume).

On va voir dès le paragraphe suivant que les variétés symplectiques ne sont pas rares dans la nature. □

1.1.2 Le fibré cotangent d'une variété comme variété symplectique.

On rappelle que si M est une variété différentiable de dimension n , son fibré cotangent défini par

$$T^*M := \bigcup_{m \in M} \{m\} \times T_m^*M$$

est naturellement muni d'une structure de variété différentiable de dimension $2n$.

Plus précisément, si un atlas de M est donné par la famille d'applications

$$\phi_i : \mathcal{U}_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n ,$$

on construit un atlas de T^*M à partir de l'atlas précédent pour lequel, à chaque application ϕ_i , est associée une application

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i : \bigcup_{m \in \mathcal{U}_i} \{m\} \times T_m^*M &\longrightarrow V_i \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (m, f) &\longmapsto (\phi_i(m), f \circ (D_m \phi_i)^{-1}) \end{aligned}$$

On montre dans ce paragraphe que le fibré cotangent T^*M d'une variété différentiable M possède une structure symplectique naturelle.

On note $\Pi : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique. Cette application est différentiable ; on note $D\Pi : T^*M \rightarrow TM$ son application tangente.

Définition *On définit la forme de Liouville α sur T^*M comme étant la 1-forme différentielle qui à tout élément (x, f) de T^*M associe la forme linéaire $v \mapsto f(D_{(x,f)}\Pi(v))$ sur $T_{(x,f)}(T^*M)$.*

Dans la suite de ce paragraphe, on considère une variété différentiable M de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et sa forme de Liouville associée α .

Proposition 1 *Considérons au voisinage de $x \in M$ une carte (U, ϕ) de M , dont les coordonnées locales sont notées x^1, \dots, x^n . Notons $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*M .*

Dans cette carte, la forme de Liouville a pour expression

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dx^i.$$

Démonstration

Si $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et $(e_k^*)_{1 \leq k \leq n}$ sa base duale, on a donc des applications :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} \subset M &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ m &\longmapsto \sum_{k=1}^n x^k(q) e_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \bigcup_{m \in \mathcal{U}} \{m\} \times T_m^*M &\longrightarrow V \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (m, f) &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^n x^k(q) e_k, \sum_{k=1}^n p_k(f) e_k^* \right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\forall m \in \mathcal{U}, \forall f \in T_m^*M, f \circ (D_m\phi)^{-1} = \sum_{i=1}^n p_i(f)e_i^*.$$

Remarquons en outre que si $pr_1 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la projection sur les n premières coordonnées, on a $pr_1 \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \Pi$, ce qui entraîne aussitôt

$$\forall (m, f) \in T^*M, pr_1 \circ D_{(m,f)}\tilde{\phi} = D_m\phi \circ D_{(m,f)}\Pi.$$

De plus, la carte associée à $\tilde{\phi}$ du fibré cotangent $T^*(T^*M)$ à la variété T^*M est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi : \bigcup_{(m,f) \in \cup_{p \in \mathcal{U}} \{p\} \times T_p^*M} \{(m, f)\} \times T_{(m,f)}^*(T^*M) &\longrightarrow (V \times (\mathbb{R}^n)^*) \times (\mathbb{R}^{2n})^* \\ ((m, f), \zeta) &\longmapsto (\tilde{\phi}(m, f), \zeta \circ (D_{(m,f)}\tilde{\phi})^{-1}). \end{aligned}$$

Alors, prenant $(m, f) \in T^*M$, notant un peu abusivement¹ $\tilde{\phi}(m, f) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ (où $x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n$ sont ici des réels), et prenant $\beta_1, \dots, \beta_{2n} \in \mathbb{R}$, la proposition sera démontrée si l'on prouve l'égalité

$$\psi(\alpha \circ \tilde{\psi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)(\beta_1, \dots, \beta_{2n})) = \sum_{i=1}^n p_i \beta_i.$$

Or,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha \circ \tilde{\psi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)(\beta_1, \dots, \beta_{2n})) &= \alpha(m, f) \left((D_{(m,f)}\tilde{\phi})^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_{2n}) \right) \\ &= f \left(D_{(m,f)}\Pi \circ (D_{(m,f)}\tilde{\phi})^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_{2n}) \right) \\ &= f \circ (D_m\phi)^{-1} \left(D_m\phi \circ D_{(m,f)}\Pi \circ (D_{(m,f)}\tilde{\phi})^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_{2n}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(f)e_i^*(pr_1 \circ D_{(m,f)}\tilde{\phi} \circ (D_{(m,f)}\tilde{\phi})^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_{2n})) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(f)e_i^*(pr_1(\beta_1, \dots, \beta_{2n})) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(f)e_i^*(\beta_1, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

Proposition 2 *La différentielle extérieure de la forme de Liouville α est une forme symplectique sur T^*M .*

Démonstration

La 2-forme différentielle $d\alpha$ est évidemment fermée.

Elle est aussi partout non-dégénérée : en effet, si $x \in M$, si x^1, \dots, x^n sont des coordonnées locales au voisinage de x , alors la forme de Liouville s'exprime dans les coordonnées locales $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ par la formule

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dx^i$$

si bien que dans ces coordonnées, on a aussi

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

Remarque

La forme symplectique $d\alpha$ est appelée forme symplectique canonique sur T^*M .

Le fibré cotangent T^*M , muni de la forme $d\alpha$, est donc muni d'une structure de variété symplectique, dite structure symplectique canonique. \square

1.1.3 Feuilletage caractéristique d'une hypersurface d'un fibré cotangent.

Proposition 3 *Soit M une variété et soit ω la forme symplectique canonique sur le fibré cotangent T^*M de M . Pour toute hypersurface Σ de T^*M , pour tout $x \in \Sigma$, le noyau de la forme bilinéaire $(\omega|_{\Sigma})_x$ est un sous-espace vectoriel de $T_x\Sigma$ de dimension 1.*

Par conséquent, sur toute hypersurface Σ de T^*M est définie une distribution de dimension 1 (donc intégrable), que l'on note $\text{Ker}(\omega|_{\Sigma})$.

1. En fait, on a identifié \mathbb{R}^n et son dual.

Définition Soient ω la forme symplectique canonique sur le fibré cotangent T^*M d'une variété M et Σ une hypersurface de T^*M . Le feuilletage associé à la distribution intégrable $\text{Ker}(\omega|_\Sigma)$ s'appelle feuilletage caractéristique de l'hypersurface Σ .

Remarque

Reprenant ce qui précède et notant \mathcal{F}_Σ le feuilletage caractéristique de l'hypersurface Σ , on définit une relation binaire sur Σ par :

$$x \sim y \stackrel{\text{(déf)}}{\iff} x \text{ et } y \text{ appartiennent à la même feuille de } \mathcal{F}_\Sigma$$

qui est clairement une relation d'équivalence sur Σ . L'espace quotient associé à cette relation d'équivalence sera noté $\Sigma/\mathcal{F}_\Sigma$; il correspond de manière évidente à l'espace des feuilles (caractéristiques). \square

Enfin, on donne un premier théorème de "réduction symplectique" concernant les feuilletages caractéristiques décrits ci-dessus.

THÉORÈME 1.1 —

Soient ω la forme symplectique canonique sur le fibré cotangent T^*M d'une variété M et Σ une hypersurface de T^*M .

On suppose que l'espace des feuilles caractéristiques est muni d'une structure de variété lisse pour laquelle la surjection canonique $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma/\mathcal{F}_\Sigma$ est une submersion.

Alors l'espace des feuilles caractéristiques est muni d'une forme symplectique $\tilde{\omega}$ telle que $\tau^*\tilde{\omega} = \omega|_\Sigma$.

1.1.4 Les morphismes symplectiques.

Définition Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension et $f : M_1 \rightarrow M_2$ une application différentiable.

1. On dit que f est symplectique ou un symplectomorphisme local si $f^*\omega_2 = \omega_1$.
2. On dit que f est un symplectomorphisme si c'est à la fois un symplectomorphisme local et un difféomorphisme.

Proposition 4 1. Un symplectomorphisme local est un difféomorphisme local.

2. La composition de deux symplectomorphismes (respectivement locaux) est un symplectomorphisme (respectivement local).

3. L'inverse d'un symplectomorphisme est un symplectomorphisme.

Démonstration

On démontre uniquement la première partie de la proposition, les deux autres sont des conséquences immédiates des propriétés fonctorielles (contravariantes) du tiré-en-arrière.

Supposons alors que $f : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ soit un symplectomorphisme local, avec M_1 et M_2 de dimension $2n$.

Soit $p \in M$. En vertu du théorème d'inversion locale et parce que $\dim T_p M_1 = \dim T_{f(p)} M_2$, le résultat sera démontré si l'on montre que l'application linéaire $D_p f : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ est injective.

Or, si $u \in T_p M_1$ vérifie $D_p f(u) = 0$, alors pour tout $v \in T_p M_1$, on a :

$$\begin{aligned} \omega_{1p}(u, v) &= (f^*\omega_2)_p(u, v) \\ &= \omega_{2f(p)}(D_p f(u), D_p f(v)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme ω_{1p} est non-dégénérée, on a bien $u = 0$. ■

Corollaire 2 Un symplectomorphisme local qui est bijectif est un symplectomorphisme.

Démonstration

Cela résulte du point 1. de la proposition précédente et du théorème d'inversion globale. ■

Proposition 5 Soient M et N deux variétés et soit $\phi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme. Alors ϕ se relève en un symplectomorphisme $T^*\phi : T^*M \rightarrow T^*N$ (les espaces cotangents T^*M et T^*N sont bien sûr munis de leur structure symplectique canonique).

Démonstration

Avec les hypothèses de la proposition, on définit :

$$\begin{aligned} T^*\phi : T^*M &\longrightarrow T^*N \\ (x, \lambda) &\longmapsto (\phi(x), \beta), \end{aligned}$$

où

$$\beta : \begin{aligned} T_{\phi(x)}N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \lambda((D_x\phi)^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Cette application est clairement \mathcal{C}^∞ , inversible et d'inverse également \mathcal{C}^∞ .

Pour montrer qu'elle est symplectique, on montre la relation $(T^*\phi)(\alpha_N) = \alpha_M$ entre formes de Liouville; cela est essentiellement une conséquence du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{T^*\phi} & T^*N \\ \Pi_M \downarrow & & \downarrow \Pi_N \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

commute, où Π_M et Π_N désignent les projections canoniques de fibrés cotangents. ■

1.1.5 Le théorème de Darboux.

THÉORÈME 1.2 (DE DARBOUX) —

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Tout point de M possède un voisinage qui est le domaine d'une carte telle que, si l'on note x^1, \dots, x^{2n} les coordonnées locales associées, la forme symplectique ait pour expression locale

$$\sum_{i=1}^n dx^{n+i} \wedge dx^i.$$

Remarque

Une carte telle que décrite dans l'énoncé est appelée carte symplectique canonique ou de Darboux. □

Corollaire 3 Deux variétés symplectiques de même dimension sont localement symplectomorphes.

Voici une proposition que l'on peut déduire du théorème de Darboux.

Proposition 6 Toute variété symplectique (M, ω) est orientable.

Démonstration

Il suffit de montrer l'existence d'une forme volume sur M .

Dans un système de coordonnées locales $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, ω s'écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

en vertu du théorème de Darboux.

Un calcul élémentaire montre que dans ce système de coordonnées,

$$\begin{aligned} \omega^n &= n! dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la $2n$ -forme différentielle ω^n est partout non nulle. ■

1.2 Champs de vecteurs hamiltoniens.

On rappelle que si X désigne un champ de vecteurs différentiable sur une variété différentiable M :

- il existe pour tout point $p \in M$ un intervalle ouvert I_p de \mathbb{R} contenant 0 et une application différentiable $c_p : I_p \rightarrow M$ tels que $c_p(0) = p$ et pour tout $t \in I_p$, $c'_p(t) = X(c_p(t))$;
- deux applications différentiables $c_1 : I_1 \rightarrow M$ et $c_2 : I_2 \rightarrow M$ qui vérifient pour $i \in \{1, 2\}$ $c_i(0) = p$ et pour tout $t \in I_i$, $c'_i(t) = X(c_i(t))$ coïncident sur $I_1 \cap I_2$;

– pour tout $p \in M$, il existe $\epsilon > 0$, il existe \mathcal{U}_p voisinage ouvert de M contenant p tels que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p \times]-\epsilon, \epsilon[&\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto c_x(t) \end{aligned}$$

soit différentiable.

En particulier, cela permet de définir le flot local au voisinage de p . Pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, on a une application :

$$\begin{aligned} \phi_X^t : \mathcal{U}_p &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi_X^t(x) := c_x(t). \end{aligned}$$

Notation

Si A est un champ de vecteurs sur M et B est une application définie et différentiable sur M (B peut être une fonction différentiable ou un champ de vecteurs différentiable par exemple), on notera $A \cdot B$ l'application définie sur M par la formule

$$\forall m \in M, A \cdot B(m) := D_m B(A(m)).$$

On rappelle également que l'on peut définir le crochet de deux champs de vecteurs différentiables X, Y sur une variété M par la formule :

$$[X, Y] := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_X^t)^* Y,$$

et que l'on a localement la formule bien connue

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X.$$

1.2.1 Produit intérieur, dérivée de Lie et champs de vecteurs.

Définition Soient X un champ de vecteurs différentiable sur une variété différentiable M et η une forme différentielle sur M .

On appelle dérivée de Lie de η selon X et on note $L_X \eta$ la forme différentielle de même degré définie par la formule

$$L_X \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_X^t)^* \eta.$$

Proposition 7 Soit α une n -forme différentielle sur une variété différentiable M et soit X un champ de vecteurs sur M que l'on suppose lisse. Pour tout $p \in M$ et pour tous $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{T}_p(M)$, on a :

$$(L_X \alpha)_p(u_1, \dots, u_n) = D_p \alpha(X(p))(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=1}^n \alpha_p(u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Démonstration

On fait la démonstration en supposant que M est un ouvert d'un certain \mathbb{R}^N .

On a par définition :

$$\begin{aligned} (L_X \alpha)_p(u_1, \dots, u_n) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_X^t)^* \alpha_p(u_1, \dots, u_n) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_{\phi_X^t(p)}(D_p \phi_X^t(u_1), \dots, D_p \phi_X^t(u_n)) \\ &= [D_{\phi_X^t(p)} \alpha(X(\phi_X^t(p)))(D_p \phi_X^t(u_1), \dots, D_p \phi_X^t(u_n)) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \alpha_{\phi_X^t(p)}(D_p \phi_X^t(u_1), \dots, \frac{d}{dt} (D_p \phi_X^t(u_k)), \dots, D_p \phi_X^t(u_n))] \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} D_p \phi_X^t = D_p X$ (égalité qui découle du lemme de Schwarz sur les dérivées croisées) et $\phi_X^0 = Id$, il résulte que

$$(L_X \alpha)_p(u_1, \dots, u_n) = D_p \alpha(X(p))(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=1}^n \alpha_p(u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Définition Soit M une variété différentiable et soit X un champ de vecteurs sur M . Pour toute forme différentielle η de degré n , on définit la $(n-1)$ -forme différentielle $i_X \eta$, appelée produit intérieur de η par X , par la formule suivante : pour tout $x \in M$, pour tous $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{T}_x M$,

$$i_X \eta_x(v_1, \dots, v_{n-1}) = \eta_x(X(x), v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Le lemme suivant montre comment la dérivée de Lie est liée au produit intérieur et à l'opérateur de différentiation extérieure.

Lemme 2 *Si X et Y désignent des champs de vecteurs lisses, on a les relations :*

1. $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ (formule de Cartan) ;
2. $L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X, Y]}$.

Démonstration

Ici encore, les formules étant compatibles avec les changements de carte, on fait la démonstration en supposant que M est un ouvert d'un certain \mathbb{R}^N .

On rappelle que si η désigne une forme différentielle de degré n sur M , la différentielle extérieure de η est la forme différentielle de degré $n + 1$ définie par :

$$\forall p \in M, \forall v_1, \dots, v_{n+1} \in T_p M, d\eta_p(v_1, \dots, v_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} D_p \eta(v_k)(v_1, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n).$$

On en vient à présent à la démonstration des points 1 et 2.

1. On considère une forme α de degré n , un point p de M et n vecteurs u_1, \dots, u_n appartenant à $T_p M$.
Etant donné que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p M$,

$$D_p(i_X \alpha)(u_k)(v_1, \dots, v_{n-1}) = D_p \alpha(u_k)(X(p), v_1, \dots, v_{n-1}) + \alpha_p(D_p X(u_k), v_1, \dots, v_{n-1}),$$

on a aussitôt

$$d(i_X \alpha)_p(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (D_p \alpha(u_k)(X(p), u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) + \alpha_p(D_p X(u_k), u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n)).$$

De plus,

$$\begin{aligned} i_X(d\alpha)_p(u_1, \dots, u_n) &= d\alpha_p(X(p), u_1, \dots, u_n) \\ &= D_p \alpha(X(p))(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k D_p \alpha(u_k)(X(p), u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) \end{aligned}$$

si bien qu'en sommant les deux égalités obtenues

$$\begin{aligned} (i_X \circ d + d \circ i_X)\alpha_p(u_1, \dots, u_n) &= D_p \alpha(X(p))(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \alpha_p(D_p X(u_k), u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) \\ &= D_p \alpha(X(p))(u_1, \dots, u_n) + \sum_{k=1}^n \alpha_p(u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_n) \\ &= L_X \alpha(u_1, \dots, u_n), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la proposition 7.

2. Prenant encore α de degré n , pour $p \in M$, pour $u_1, \dots, u_{n-1} \in T_p M$, on a d'une part d'après la proposition 7

$$\begin{aligned} L_X(i_Y \alpha)_p(u_1, \dots, u_{n-1}) &= D_p(i_Y \alpha)(X(p))(u_1, \dots, u_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} i_Y \alpha_p(u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_{n-1}) \\ &= D_p \alpha(X(p))(Y(p), u_1, \dots, u_{n-1}) + \alpha_p(D_p Y(X(p)), u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_p(Y(p), u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_{n-1}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} i_Y(L_X \alpha)_p(u_1, \dots, u_{n-1}) &= (L_X \alpha)_p(Y(p), u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &= D_p \alpha(X(p))(Y(p), u_1, \dots, u_{n-1}) + \alpha_p(D_p X(Y(p)), u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_p(Y(p), u_1, \dots, u_{k-1}, D_p X(u_k), u_{k+1}, \dots, u_{n-1}). \end{aligned}$$

En faisant la différence des deux égalités obtenues, on aboutit à :

$$\begin{aligned} (L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X)\alpha_p(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \alpha_p(D_p Y(X(p)) - D_p X(Y(p)), u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &= \alpha_p([X, Y](p), u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &= (i_{[X, Y]}\alpha)_p(u_1, \dots, u_{n-1}). \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. ■

On termine ce paragraphe par une formule faisant intervenir le crochet de Lie de deux champs de vecteurs différentiables.

Proposition 8 *Pour tous champs de vecteurs différentiables X, Y sur une variété M , pour toute fonction f deux fois différentiable sur M , on a :*

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Démonstration

On suppose que M est un ouvert d'un certain \mathbb{R}^N .

Calculons pour $m \in M$, $X \cdot (Y \cdot f)(m)$.

On a $\forall p \in M, Y \cdot f(p) = D_p f(Y(p))$. Donc en dérivant, on obtient

$$\forall p \in M, \forall u \in T_p M, D_p(Y \cdot f)(u) = D_p^2 f(u, Y(p)) + D_p f(D_p Y(u))$$

si bien que

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \cdot f)(m) &= D_m(Y \cdot f)(X(m)) \\ &= D_m^2 f(X(m), Y(m)) + D_m f(D_m Y(X(m))). \end{aligned}$$

On a de même

$$Y \cdot (X \cdot f)(m) = D_m^2 f(Y(m), X(m)) + D_m f(D_m X(Y(m))).$$

Comme la dérivée seconde en m est bilinéaire symétrique (d'après Schwarz), on obtient :

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \cdot f)(m) - Y \cdot (X \cdot f)(m) &= D_m f(D_m Y(X(m))) - D_m f(D_m X(Y(m))) \\ &= D_m f([X, Y](m)) \\ &= [X, Y] \cdot f(m). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. ■

1.2.2 Champs hamiltoniens.

Définition *Soient (M, ω) une variété symplectique et X un champ de vecteurs différentiable sur M .*

On dit que X est localement hamiltonien si $L_X \omega = 0$.

On dit que X est globalement hamiltonien s'il existe une fonction différentiable f telle que $i_X \omega = -df$. Dans ce cas, on dit que f est un hamiltonien associé à X .

Remarque

S'il n'y a pas de risque de confusion, on dit aussi parfois qu'un champ X globalement hamiltonien est "hamiltonien" tout court. □

Proposition 9 *Soient (M, ω) une variété symplectique et X un champ de vecteurs différentiable sur M dont le flot est noté ϕ_X^t . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. X est localement hamiltonien
2. $d(i(X)\omega) = 0$.
3. $(\phi_X^t)^* \omega = \omega$.

Démonstration

L'équivalence entre (1) et (2) est une conséquence immédiate du deuxième point du lemme 2.

L'équivalence entre (1) et (3) résulte de la formule suivante, valide pour toute forme différentielle η :

$$(\phi_X^t)^*(L_X \eta) = \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=t} ((\phi_X^\theta)^* \eta).$$

Corollaire 4 *Un champ de vecteurs (globalement) hamiltonien est localement hamiltonien.*

Notons que nous avons une réciproque partielle au corollaire précédent. En effet, notant comme d'habitude $H^1(M)$ le premier espace de cohomologie de De Rham de la variété M , on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 10 *Si (M, ω) est une variété symplectique telle que $H^1(M) = 0$, tout champ de vecteurs localement hamiltonien sur M est hamiltonien.*

Démonstration

Supposons que X soit un champ de vecteurs localement hamiltonien sur M . La proposition 9 montre que $i(X)\omega$ est fermée. Mais puisque $H^1(M) = 0$, toute 1-forme fermée est exacte. Autrement dit, il existe une fonction f différentiable (c'est-à-dire une forme différentielle de degré nul) telle que $i(X)\omega = -df$. ■

Proposition 11 Soient X et Y deux champs de vecteurs localement hamiltoniens sur (M, ω) . Alors le champ $[X, Y]$ est globalement hamiltonien et a pour hamiltonien $i_Y i_X \omega = \omega(X, Y)$.

Démonstration

Utilisant le lemme 2, on a d'une part

$$L_X i_Y \omega = i_{[X, Y]} \omega$$

puisque $L_X \omega = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} L_X i_Y \omega &= (i_X d + di_X) i_Y \omega \\ &= di_X i_Y \omega && \text{car } di_Y \omega = 0 \\ &= d(\omega(Y, X)) \\ &= -d(\omega(X, Y)). \end{aligned}$$

Il s'agit finalement de comparer les deux égalités obtenues. ■

La proposition suivante constitue l'ingrédient fondateur de la mécanique hamiltonienne.

Proposition 12 Soit (M, ω) une variété symplectique et f une fonction lisse (c'est-à-dire de classe \mathcal{C}^∞) sur M à valeurs dans \mathbb{R} .

Alors il existe un unique champ de vecteurs X_f sur M tel que $i_{X_f} \omega = -df$. De plus, X_f est lisse et c'est un champ de vecteurs hamiltonien.

Démonstration

Soit $m \in M$. Comme $\omega : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire non-dégénérée, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : T_m M &\longrightarrow T_m^* M \\ y &\longmapsto (x \mapsto \omega(y, x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels.

Puisque $-D_m f$ est une forme linéaire sur $T_m M$, il résulte qu'il existe un unique élément noté $X_f(m) \in T_m M$ tel que $\forall x \in T_m M, \omega(X_f(m), x) = -D_m f(x)$.

On définit ainsi une application $X_f : M \rightarrow T_m M$ qui à $x \in M$ associe $X_f(m) \in T_m M$. Par définition, on a $i_{X_f} \omega = -df$.

Pour ce qui est de la différentiabilité de X_f , on suppose que M est un certain \mathbb{R}^n . Prenons $m \in M = \mathbb{R}^n$ et montrons que X_f est différentiable en m .

Comme Df est dérivable en m , on peut écrire dans l'espace des formes linéaires sur \mathbb{R}^n :

$$D_{m+h} f - D_m f - D_m^2 f(h) = \|h\| \epsilon(h),$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n et $\epsilon(h)$ tend vers la forme nulle dans l'espace des formes linéaires sur \mathbb{R}^n quand h tend vers 0. Exploitant l'isomorphisme précédent, il existe pour tout h un unique vecteur de $T_m M$ noté $D_m X_f(h)$ tel que $\forall u \in T_m M, \omega(D_m X_f(h), u) = -D_m(Df)(h)(u) = -D_m^2 f(h)(u)$. Maintenant,

- L'application $h \rightarrow D_m X_f(h)$ est linéaire : si $h, h' \in T_m M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $u \in T_m M$,

$$\begin{aligned} \omega(D_m X_f(h) + \lambda D_m X_f(h'), u) &= \omega(D_m X_f(h), u) + \lambda \omega(D_m X_f(h'), u) \\ &= -D_m^2 f(h)(u) - \lambda D_m^2 f(h')(u) \\ &= -D_m^2 f(h + \lambda h')(u) \end{aligned}$$

Or, $D_m X_f(h + \lambda h')$ est l'unique élément de $T_m M$ qui vérifie : $\forall u \in T_m M, \omega(D_m X_f(h + \lambda h'), u) = -D_m^2 f(h + \lambda h')(u)$. D'où $D_m X_f(h) + \lambda D_m X_f(h') = D_m X_f(h + \lambda h')$.

- Aussi, $\forall u \in T_m M, \omega(X_f(m+h) - X_f(m) - D_m X_f(h), u) = \|h\| \epsilon(h)(u)$, ce qui se réécrit $\Phi(X_f(m+h) - X_f(m) - D_m X_f(h)) = \|h\| \epsilon(h)$. Exploitant maintenant la continuité de Φ^{-1} , on aboutit à la relation

$$X_f(m+h) - X_f(m) - D_m X_f(h) = o(\|h\|).$$

On a donc montré la différentiabilité de X_f en m .

Pour montrer le caractère lisse de X_f , on procède de la même façon de proche en proche, utilisant que pour tout $k \geq 1$, $\omega(D_m^k X_f(u_1, \dots, u_k), x) = -D_m^{k+1} f(u_1, \dots, u_k, x)$.

Remarque

Le champ de vecteurs lisse X_f de la proposition s'appelle champ hamiltonien associé à f . □

Proposition 13 Si f, g sont des fonctions lisses sur la variété symplectique (M, ω) et si λ est un réel, alors on a pour tout $m \in M$,

$$X_{f+g}(m) = X_f(m) + X_g(m) \text{ et } X_{\lambda f}(m) = \lambda X_f(m).$$

Démonstration

Soit $x \in T_M$. On a :

$$\begin{aligned} \omega(X_f(m) + X_g(m), x) &= \omega(X_f(m), x) + \omega(X_g(m), x) \\ &= -D_m f(x) - D_m g(x) \\ &= -D_m(f+g)(x). \end{aligned}$$

Or par définition, $X_{f+g}(m)$ est l'unique vecteur de $T_m M$ qui vérifie $\forall x \in T_m M, \omega(X_{f+g}(m), x) = -D_m(f+g)(x)$. Il s'ensuit que $X_{f+g}(m) = X_f(m) + X_g(m)$.

La deuxième égalité de la proposition se montre de la même manière. ■

Notons $\mathcal{E} := \{X_f | f \in \mathcal{C}^\infty(M)\}$. On déduit aisément de la proposition précédente le fait suivant.

Corollaire 5 Les applications

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} & \text{ et } \quad \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (X_f, X_g) &\longmapsto X_{f+g} & (\lambda, X_f) &\longmapsto X_{\lambda f} \end{aligned}$$

munissent \mathcal{E} d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

1.3 Notion d'équivalence entre champs de vecteurs.

Définition Soient M et N deux variétés et X et Y deux champs de vecteurs sur les variétés respectives M et N . On note $\phi_X^t : M \rightarrow M$ et $\phi_Y^t : N \rightarrow N$ les flots correspondants.

On dit que X et Y (ou que les flots correspondants) sont conjugués s'il existe $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme tel que

$$\forall m \in M, f(\phi_X^t(m)) = \phi_Y^t(f(m)).$$

On dit que X et Y (ou que les flots correspondants) sont équivalents s'il existe $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme, une famille $(I_m)_{m \in M}$ d'intervalles de \mathbb{R} et une famille $(s_m)_{m \in M}$ de difféomorphismes croissants $s_m : I_m \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall m \in M, f(\phi_X^t(m)) = \phi_Y^{s_m(t)}(f(m)).$$

Lemme 3 Soient M et N deux variétés, $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme local et X et Y deux champs de vecteurs sur les variétés respectives M et N tels que $X = f^*Y$.

Alors les flots de X et de Y sont conjugués via f , autrement dit

$$\forall m \in M, f(\phi_X^t(m)) = \phi_Y^t(f(m)).$$

Démonstration

Il s'agit de remarquer que $t \mapsto f(\phi_X^t(m))$ est une courbe intégrale de Y qui passe par $f(m)$ en $t = 0$.

Lemme 4 Soit X un champ de vecteurs lisse sur une variété M dont le flot est noté ϕ_X^t (t est un paramètre "temporel" appartenant à un certain intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0) et soit m un point de M . On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que pour tout $t \in I$, $f(\phi_X^t(m)) > 0$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} s_m : \quad I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \frac{d\tau}{f(\phi_X^\tau(m))} \end{aligned}$$

définit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme croissant sur son image. De plus, si γ désigne la courbe intégrale de X satisfaisant $\gamma(0) = m$, alors la courbe $\gamma \circ s_m^{-1}$ est la courbe intégrale du champ de vecteurs $f.X$ telle que $\gamma \circ s_m^{-1}(0) = m$.

Autrement dit,

$$\phi_X^{s_m^{-1}(u)}(m) = \phi_{fX}^u(m),$$

ou encore

$$\phi_X^t(m) = \phi_{fX}^{s_m(t)}(m).$$

En particulier, les champs X et fX sont équivalents sur M .

Démonstration

Il s'agit simplement de dériver l'application composée $u \mapsto \gamma \circ s^{-1}(u)$, d'écrire $\gamma \circ s^{-1}(u) = \phi_X^{s^{-1}(u)}(m)$ et de remarquer que

$$\frac{d\gamma \circ s^{-1}(u)}{du} = (f.X)(\phi_X^{s^{-1}(u)}(m)).$$

Lemme 5 Soient M et N deux variétés symplectiques, F un hamiltonien sur N et $f : M \rightarrow N$ un symplectomorphisme local.

Alors pour tout $m \in M$, $X_{F \circ f}(m) = f^* X_F(m)$.

1.4 Crochets de Poisson : généralités et structure de Poisson sur l'ensemble des fonctions lisses sur une variété symplectique

Définition On appelle *algèbre de Poisson réelle* toute \mathbb{R} -algèbre commutative $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ munie d'une application \mathbb{R} -bilinéaire $\{, \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, appelée *crochet de Poisson*, qui satisfait aux axiomes suivantes :

1. $\forall f, g \in \mathcal{A}$, $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisymétrie)
2. $\forall f, g, h \in \mathcal{A}$, $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identité de Jacobi)
3. $\forall f, g, h \in \mathcal{A}$, $\{f, g \times h\} = h \times \{f, g\} + g \times \{f, h\}$ (identité de Leibniz).

Remarque

Toute algèbre de Poisson \mathcal{A} est en particulier une algèbre de Lie en définissant pour crochet de Lie le crochet de Poisson associé à \mathcal{A} . \square

On considère maintenant une variété symplectique (M, ω) et la \mathbb{R} -algèbre commutative des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs dans \mathbb{R} , notée $\mathcal{C}^\infty(M)$.

On a vu au paragraphe 1.2 qu'à chaque fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est associé un champ hamiltonien X_f . On définit pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(M)^2$ la fonction

$$\begin{aligned} \{f, g\} : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto \omega(X_f(m), X_g(m)) \end{aligned} .$$

La proposition 12 montre que X_f et X_g sont lisses sur M . Ainsi, on obtient une application

$$\begin{aligned} \{, \} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\} \end{aligned}$$

Proposition 14 L'application $\{, \}$ vérifie les propriétés suivantes.

1. $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\forall m \in M$, $\{f, g\}(m) = -D_m f(X_g(m)) = D_m g(X_f(m))$, ce que l'on peut réécrire de manière plus compacte sous la forme $\{f, g\} = -X_g \cdot f = X_f \cdot g$
3. $\{, \}$ est \mathbb{R} -bilinéaire
4. $\forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\{f, gh\} = h\{f, g\} + g\{f, h\}$
5. $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$
6. $\forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Démonstration

1. Ce premier point résulte de l'antisymétrie de la forme symplectique ω .
2. L'égalité $\{f, g\}(m) = -D_m f(X_g(m))$ est une conséquence directe de la définition de X_f . L'antisymétrie de $\{, \}$ implique évidemment la deuxième égalité.
3. Comme $\{, \}$ est antisymétrique, il suffit de montrer que $\{, \}$ est linéaire à gauche. Or cela résulte de la proposition 13 et de la linéarité à gauche de ω .
4. Pour f, g, h et m comme dans la proposition, on a compte tenu du deuxième point :

$$\begin{aligned} \{f, gh\}(m) &= D_m(gh)(X_f(m)) \\ &= h(m)D_m g(X_f(m)) + g(m)D_m h(X_f(m)) \\ &= h(m)\{f, g\}(m) + g(m)\{f, h\}(m) \end{aligned}$$

5. Cela découle aisément de la proposition 11.

6. Utilisant le deuxième point et la proposition 11, on a :

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= X_f \cdot (X_g \cdot h) \\ \{g, \{f, h\}\} &= X_g \cdot (X_f \cdot h) \\ \{\{f, g\}, h\} &= [X_f, X_g] \cdot h\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} - \{\{f, g\}, h\} \\ &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) - [X_f, X_g] \cdot h \\ &= 0,\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la proposition 8.

Corollaire 6 *L'application $\{, \}$ munit $\mathcal{C}^\infty(M)$ d'une structure d'algèbre de Poisson.*

1.5 Systèmes hamiltoniens, définition et écriture locale.

Soit (M, ω) une variété symplectique et m un point de M . En vertu du théorème de Darboux, on peut trouver au voisinage de m un système de coordonnées locales $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ tel que ω s'exprime dans ces coordonnées sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i$.

Soit $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On a associé un unique champ hamiltonien X_H tel que

$$\forall p \in M, \forall u \in T_p M, \omega(X_H(p), u) = -D_p H(u).$$

Pour p dans un voisinage contenant m décrit comme précédemment, on a

$$X_H(p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}(p) \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

En effet, il suffit (en raison de l'unicité de $X_H(p)$) de voir qu'avec cette expression, on a bien

$$\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i(X_H(p), u) = -D_p H(u),$$

ce qui est un calcul simple d'algèbre extérieure.

Remarque

Cette expression du champ de vecteurs hamiltonien en carte canonique permet d'obtenir l'expression locale du crochet de Poisson de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On a en effet (après avoir remplacé H par f puis g dans l'expression obtenue précédemment) :

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Définition *On appelle système hamiltonien, et on note (M, ω, H) , la donnée sur une variété symplectique (M, ω) d'un hamiltonien H (élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$) et du système différentiel défini par*

$$c'(t) = X_H(c(t)),$$

où X_H désigne le champ de vecteurs hamiltonien sur (M, ω) associé à H et où c est une application définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et à valeurs dans M .

Remarques

- S'il n'y a pas d'ambiguïté particulière à propos de la forme symplectique considérée sur M , on notera aussi parfois simplement (M, H) pour désigner un système hamiltonien.
- Reprenant les éléments qui précèdent cette définition, le système hamiltonien se réécrit localement sous la forme suivante, en convenant que $c(t)$ s'écrive localement $(x^1(t), \dots, x^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x^1(t), \dots, x^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x^1(t), \dots, x^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \end{cases}.$$

Ce sont les équations de Hamilton. □

1.6 Le flot géodésique sur le fibré tangent à une variété pseudo-riemannienne.

On introduit ici un objet qui va apparaître à plusieurs reprises dans la suite : le flot géodésique d'une variété munie d'une métrique pseudo-riemannienne.

On précise que pour toute variété M , le fibré cotangent T^*M sera implicitement muni de sa structure symplectique canonique.

On commence par la proposition suivante.

Proposition 15 *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Il existe un unique champ de vecteurs G sur le fibré tangent TM dont les trajectoires sont de la forme $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in TM$ où γ est une géodésique sur M .*

Définition *Pour une variété pseudo-riemannienne (M, g) , le champ de vecteurs introduit dans la proposition précédente s'appelle champ de vecteurs géodésique sur TM .*

Remarque

Le flot géodésique sur le fibré tangent à une variété pseudo-riemannienne (M, g) est donc le groupe à un paramètre ϕ^t de difféomorphismes de ce fibré défini par

$$\forall (u, v) \in TM, \phi^t(u, v) = \frac{d}{dt}(\gamma_{(u,v)}(t)),$$

où $\gamma_{u,v}$ est l'unique géodésique de M telle que $\gamma_{u,v}(0) = u$ et $\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_{(u,v)}(t) = v$. □

Remarque

La métrique pseudo-riemannienne g , partout non-dégénérée, permet de définir un isomorphisme de fibrés vectoriels $\psi : TM \rightarrow T^*M$ donné fibre par fibre par

$$\begin{aligned} \psi_m : T_m M &\longrightarrow T_m^* M \\ X &\longmapsto (Y \mapsto g_m(X, Y)). \end{aligned}$$

Cela permet en outre de définir, pour tout m , une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur T_m^*M par $g_m^*(u_1, u_2) := g_m(\psi_m^{-1}(u_1), \psi_m^{-1}(u_2))$. □

Définition *Le fibré tangent unitaire à une variété pseudo-riemannienne (M, g) est défini par*

$$T_1 M := \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \{X \in T_m M \mid g_m(X, X) = 1\}.$$

Le fibré cotangent unitaire à une variété pseudo-riemannienne (M, g) est défini par

$$T_1^* M := \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \{u \in T_m^* M \mid g_m^*(u, u) = 1\}.$$

Remarque

Pour une géodésique γ , $\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, donc le flot du champ de vecteurs géodésique G préserve $T_1 M$. Aussi, on parle de champ de vecteurs géodésique sur $T_1 M$. □

THÉORÈME 1.3 —

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne.

- *La 1-forme de Liouville λ sur le fibré cotangent T^*M induit une forme de contact sur T_1^*M , encore notée λ . De plus, le champ de vecteurs de Reeb R_λ associé à cette forme de contact est dual au champ de vecteurs géodésique G sur $T_1 M$, au sens où $\psi^* R_\lambda = G$.*
- *Soit $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ le hamiltonien défini par $H(m, u) = \frac{1}{2}g_m^*(u, u)$. Alors le long de $H^{-1}(\frac{1}{2}) = T_1^*M$, le champ de vecteurs de Reeb R_λ est égal au champ de vecteurs hamiltonien X_H (défini via la forme symplectique $d\lambda$).*

Remarque

On utilisera le théorème précédent de la manière suivante : si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne et si l'on identifie T^*M à TM comme plus haut, alors la fonction

$$\begin{aligned} G : T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (m, u) &\longmapsto \frac{1}{2}g_m(u, u) \end{aligned}$$

est le hamiltonien dont le champ de vecteurs associé en restriction à $T_1^*M = G^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ est le champ de vecteurs géodésique. On dira simplement que G est le hamiltonien géodésique. □

Prêtons plus particulièrement attention aux variétés munies d'une métrique partout non-dégénérée mais ni définie positive ni définie négative. Pour ce qui est de la terminologie, on conviendra qu'une telle variété est "strictement pseudo-riemannienne" ou "munie d'une métrique pseudo-riemannienne stricte". Par exemple, une variété munie d'une métrique lorentzienne (de signature $(1, n - 1)$ si n désigne la dimension de la variété) est une variété strictement pseudo-riemannienne.

L'existence de la structure symplectique canonique sur le fibré cotangent d'une variété va permettre de donner quelques caractérisations de certaines géodésiques particulières de variétés pseudo-riemanniennes strictes.² La définition suivante précise le cadre d'étude.

Définition Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne stricte.

On appelle géodésique de lumière de (M, g) toute géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ telle que pour tout t , $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$.³ De plus, si

$$\begin{aligned} G : T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \beta) &\longmapsto \frac{1}{2}g_x^*(\beta, \beta) \end{aligned}$$

désigne le hamiltonien géodésique associé à la variété (M, g) , le champ de vecteurs hamiltonien associé à G restreint à l'hypersurface $T_0^+M := \{(x, \beta) | \beta \neq 0 \text{ et } G(x, \beta) = 0\}$ de T^*M est appelé champ de vecteurs géodésique de lumière.

Remarque

Les projetés des orbites de $X_{G|_{T_0^+M}}$ dans M sont les géodésiques de lumière.⁴ □

Proposition 16 Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne stricte et G le hamiltonien géodésique associé. Les orbites du champ de vecteurs géodésique de lumière coïncident avec les feuilles du feuilletage caractéristique de l'hypersurface T_0^+M de T^*M .

Démonstration

Appelons ω la forme symplectique canonique sur T^*M . Il s'agit de voir que la distribution engendrée par $X_{G|_{T_0^+M}}$ coïncide avec la distribution qui à tout élément (x, β) de T_0^+M associe le noyau de la forme bilinéaire $\omega_{(x, \beta)}$. Pour des raisons de dimension, il suffit de voir que $X_G(x, \beta)$ appartient à $\text{Ker}(\omega_{|_{T_0^+M}})_{(x, \beta)}$, or cela résulte de ce que $\forall u \in T_{(x, \beta)}(T_0^+M)$,

$$\begin{aligned} \omega_{(x, \beta)}(X_G(x, \beta), u) &= -D_{(x, \beta)}G(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 17 Soit (M, g) une variété strictement pseudo-riemannienne. Deux métriques dans la classe conforme de g possèdent les mêmes géodésiques de lumière non-paramétrées.

Démonstration

Prenons \tilde{g} une métrique conforme à g . On note $T_{0, g}^+M$ et $T_{0, \tilde{g}}^+M$ les hypersurfaces de T^*M associées respectivement à g et \tilde{g} comme dans la définition ci-dessus.

Comme \tilde{g} est conforme à g , il est évident que les hypersurfaces $T_{0, g}^+M$ et $T_{0, \tilde{g}}^+M$ sont les mêmes. Il y a par définition un et un seul feuilletage caractéristique sur l'hypersurface $T_{0, g}^+M = T_{0, \tilde{g}}^+M$; ainsi, d'après la proposition précédente, les deux champs de vecteurs géodésique de lumière (correspondant aux deux métriques pseudo-riemanniennes strictes g et \tilde{g}) ont les mêmes orbites. La remarque ci-dessus montre donc que les géodésiques de lumière non-paramétrées sont les mêmes. ■

1.7 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique.

On commence par une définition générale.

Définition Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On appelle action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* (dual de \mathfrak{g}) l'action donnée par l'application

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, \nu) &\longmapsto {}^t(\text{Ad}(g^{-1}))(\nu) \end{aligned}$$

Remarque

Il s'agit en fait de la représentation contragrédiente Ad^* de la représentation adjointe $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$. □

2. Cette structure symplectique particulière était déjà utilisée dans le théorème 1.3.

3. Informellement, une géodésique de lumière est parcourue à "vitesse nulle".

4. Ici, il faut évidemment comprendre géodésiques non-paramétrées, c'est-à-dire leurs trajectoires indépendamment du paramétrage.

Les actions de groupes de Lie sur les variétés symplectiques qui sont vraiment intéressantes et que l'on étudiera font l'objet de la définition suivante.

Définition Soit G un groupe de Lie agissant à gauche de manière lisse sur une variété symplectique (M, ω) via l'application $\phi : G \times M \rightarrow M$. Pour tout g dans G , on note ϕ_g le difféomorphisme de M dans M défini par $x \mapsto \phi(g, x)$. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et \mathfrak{g}^* son dual.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on appelle champ fondamental associé à X l'application

$$\begin{aligned} X_M : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp(-tX), x).^5 \end{aligned}$$

L'action ϕ est dite symplectique si $\forall g \in G, \phi_g^* \omega = \omega$ (autrement dit G agit par symplectomorphismes).

Elle est dite hamiltonienne si elle est symplectique et s'il existe une application moment, c'est-à-dire une application lisse $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que pour tout X dans \mathfrak{g} , pour tout m dans M et pour tout u dans $T_m M$,

$$\omega_m(X_M(m), u) = -D_m \mu(u) \cdot X,$$

et qui soit G -équivariante pour l'action de G sur M et l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* .

Remarques

- Si une action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique est hamiltonienne, alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$, X_M est globalement hamiltonien.
- Une action symplectique d'un groupe de Lie G sur une variété (M, ω) n'est pas loin d'être "localement hamiltonienne" en le sens suivant : tout élément $\xi \in \mathfrak{g}$ définit comme plus haut un champ de vecteurs ξ_M sur M ; or, $(\phi_{\xi_M}^t)^* \omega = \omega$ puisque l'action est symplectique si bien que $L_{\xi_M} \omega = \omega$ en vertu de la proposition 9. Si en plus ξ_M est globalement hamiltonien pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, alors il existe $f(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $D_m(f(\xi))(u) = \omega_m(\xi_M(m), u)$ pour $m \in M$ et $u \in T_m M$; à partir de là, il est aisé de construire une application lisse $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que pour tout ξ dans \mathfrak{g} , pour tout m dans M et pour tout u dans $T_m M$, $\omega_m(\xi_M(m), u) = -D_m \mu(u) \cdot \xi$. Néanmoins, il ne s'agit pas d'une application moment au sens de la définition donnée puisque la G -équivariance pour les actions citées dans la définition n'est pas vérifiée. En vérité, l'application μ est G -équivariante pour l'action de G sur \mathfrak{g}^* qui est une action "affine" dont la partie linéaire est donnée par l'action coadjointe. Notons que si le groupe G est compact ou semi-simple, il est possible de trouver un point fixe pour cette action "affine" et donc de changer l'application μ en une véritable application moment. □

Proposition 18 Soit (M, ω) une variété symplectique telle que $H^1(M) = 0$ et soit G un groupe de Lie agissant sur M . Alors l'action de G sur M est symplectique si et seulement si elle est hamiltonienne.

Démonstration

C'est essentiellement une conséquence de la proposition 10. ■

Proposition 19 On suppose qu'un groupe de Lie G agit sur une variété symplectique (M, ω) de façon hamiltonienne.

Si $\nu \in \mathfrak{g}^*$ est laissé fixe par l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* , l'action de G sur M induit une action lisse de G sur $\mu^{-1}(\{\nu\})$.

Démonstration

Il s'agit pour l'essentiel de voir que si $g \in G$ et $x \in \mu^{-1}(\{\nu\})$, alors $g \cdot x \in \mu^{-1}(\{\nu\})$.

Or, par G -équivariance de μ , on a

$$\begin{aligned} \mu(g \cdot x) &= \text{Ad}^*(g)(\mu(x)) \\ &= \text{Ad}^*(g)(\nu) \\ &= \nu. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Etant donné un groupe de Lie G et une action hamiltonienne (par exemple à gauche) de G sur une variété symplectique lisse (M, ω) , le quotient $G \backslash M$ n'est en général pas une variété et encore moins une variété symplectique. Même le quotient de M par une action libre et propre de G (qui possède une structure de variété pour laquelle la projection canonique $M \rightarrow G \backslash M$ est une submersion lisse) ne possède pas de structure symplectique en général.

Notamment, puisque $\dim M$ est paire, si $\dim G$ est un entier impair, la variété quotient est de dimension impaire ; dans ce cas, il ne peut pas exister de forme symplectique sur le quotient.

Le théorème ci-après montre qu'il est possible de munir des quotients particuliers d'une structure symplectique. C'est un théorème de réduction symplectique.

THÉORÈME 1.4 (DE MARSDEN-WEINSTEIN-MEYER) —

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne de G dont $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est l'application moment.

Soit $\nu \in \mathfrak{g}^*$ laissé fixe par l'action coadjointe. On nomme $i : \mu^{-1}(\{\nu\}) \hookrightarrow M$ l'inclusion.

Si l'action de G sur $\mu^{-1}(\{\nu\})$ est libre et propre, alors

1. $\mu^{-1}(\{\nu\})/G$ est une variété lisse de dimension $\dim M - 2 \dim G$ et la surjection canonique

$$\Pi : \mu^{-1}(\{\nu\}) \rightarrow \mu^{-1}(\{\nu\})/G$$

est une submersion lisse ;

2. de plus, il existe une unique forme symplectique sur $\mu^{-1}(\{\nu\})/G$, notée $\tilde{\omega}$, telle que $\Pi^*\tilde{\omega} = i^*\omega$.

Démonstration

Montrons d'abord que ν est une valeur régulière de μ . Prenons donc $x \in \mu^{-1}(\{\nu\})$ et montrons que $D_x\mu : T_xM \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est surjective.

On considère pour cela l'application linéaire

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_xM \\ A & \longmapsto & A_M(x) \end{array},$$

qui a pour image $T_x(G \cdot x)$ et pour noyau $\mathfrak{g}_x := \{A \in \mathfrak{g} \mid A_M(x) = 0\}$ qui n'est rien d'autre que l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans G , lequel est trivial car l'action du groupe de Lie G sur $\mu^{-1}(\{\nu\})$ est libre. Ainsi Ψ est injective et $\dim \mathfrak{g}^* = \dim \mathfrak{g} = \dim T_x(G \cdot x)$. Comme $T_x(G \cdot x)$ est l'image de Ψ , on a aussi $\text{Ker } D_x\mu = T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x}$ par définition d'une action hamiltonienne.

Comme ω_x est non-dégénérée, on a

$$\dim T_xM = \dim T_x(G \cdot x) + \dim T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}^* &= \dim T_x(G \cdot x) \\ &= \dim M - \dim T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x} \\ &= \dim T_xM - \dim \text{Ker } D_x\mu \\ &= \text{rg}(D_x\mu). \end{aligned}$$

la dernière égalité étant fournie par le théorème du rang.

Cela implique bien que ν est une valeur régulière de μ , donc que $\mu^{-1}(\{\nu\})$ est une variété de dimension $\dim M - \dim G$. Le premier point résulte alors du fait que l'action du groupe de Lie G sur la variété $\mu^{-1}(\{\nu\})$ est libre et propre.

Notons $\Pi : \mu^{-1}(\{\nu\}) \rightarrow \mu^{-1}(\{\nu\})/G$ la surjection canonique. Prenons $x \in \mu^{-1}(\{\nu\})$ et appelons $j : G \cdot x \hookrightarrow \mu^{-1}(\{\nu\})$ l'inclusion. La relation $\Pi \circ j = \bar{x}$ où \bar{x} est l'image de x dans le quotient induit par différentiation la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow T_x(G \cdot x) \longrightarrow T_x\mu^{-1}(\{\nu\}) \longrightarrow T_{\Pi(x)}(\mu^{-1}(\{\nu\})/G) \longrightarrow 0.$$

L'espace tangent $T_x(G \cdot x)$ est un sous-espace vectoriel isotrope de (T_xM, ω_x) .

En effet, on a d'une part, $T_x\mu^{-1}(\{\nu\}) = \text{Ker } D_x\mu$ puisque l'inclusion $T_x\mu^{-1}(\{\nu\}) \subset \text{Ker } D_x\mu$ est évidente et ces deux espaces vectoriels ont même dimension à cause de la surjectivité de $D_x\mu$. D'autre part, $\text{Ker } D_x\mu = T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x}$ comme on l'a constaté au début de la preuve.

Ainsi $T_x(G \cdot x) \subset T_x(\mu^{-1}(\{\nu\})) = T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x}$.

Alors ω_x induit une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée $\tilde{\omega}_{\Pi(x)}$ sur l'espace vectoriel quotient $T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x} / T_x(G \cdot x)$ de la manière suivante : pour $v, w \in T_x(G \cdot x)^{\perp \omega_x}$, on définit

$$\tilde{\omega}_{\Pi(x)}(\bar{v}, \bar{w}) := \omega_x(v, w).$$

Comme $T_x(G \cdot x)$ est isotrope pour la forme ω_x , $\tilde{\omega}_{\Pi(x)}$ est bien définie. On vérifie sans peine qu'elle est bilinéaire, antisymétrique et non-dégénérée. On a ainsi une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur le quotient $T_x\mu^{-1}(\{\nu\})/T_x(G \cdot x)$, donc sur $T_{\Pi(x)}(\mu^{-1}(\{\nu\})/G)$ par propriété de la suite exacte que l'on notera encore $\tilde{\omega}_{\Pi(x)}$.

De plus, par construction $\Pi^*\tilde{\omega} = i^*\omega$.

Il faut encore voir que $\tilde{\omega}$ est fermée. Cela découle du calcul suivant : $\Pi^*(d\tilde{\omega}) = d\Pi^*\tilde{\omega} = di^*\omega = i^*(d\omega) = 0$ et de la surjectivité de Π .

Enfin il est clair qu'une forme $\tilde{\omega}$ vérifiant $\Pi^*\tilde{\omega} = i^*\omega$ est uniquement déterminée. ■

Remarque

Le vecteur nul de \mathfrak{g}^* est toujours laissé fixe par l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* . \square

1.8 Espaces homogènes symplectiques d'un groupe de Lie.

1.8.1 Définitions et propriétés fondamentales.

On rappelle que si G est un groupe de Lie (d'algèbre de Lie notée \mathfrak{g} et de neutre e) et H un sous-groupe fermé de G (d'algèbre de Lie notée \mathfrak{h}), alors l'espace homogène G/H est muni d'une structure de variété lisse telle que la projection canonique $\Pi : G \rightarrow G/H$ est une submersion lisse.

On conserve ces notations pour la suite.

Définition On dit que G/H est un espace homogène symplectique s'il existe une forme symplectique sur G/H qui soit invariante sous l'action de G sur G/H par translation à gauche.

Proposition 20 Pour tout entier $p \geq 1$, l'application $\omega \mapsto \Pi^*\omega$ établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des p -formes différentielles sur G/H qui sont invariantes sous l'action de G sur G/H par translation à gauche et l'ensemble des p -formes différentielles θ sur G invariantes sous l'action de G sur lui-même par translation à gauche et qui satisfont

- $\forall \xi \in \mathfrak{h}, i_\xi(\theta_e) = 0$,⁶
- θ_e est invariante pour l'action de H sur \mathfrak{g} obtenue par restriction de l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} .

Proposition 21 Si une 2-forme ω munit G/H d'une structure d'espace homogène symplectique, alors

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid i_\xi((\Pi^*\omega)_e) = 0\}.$$

Démonstration

La proposition ci-dessus fournit une inclusion.

Pour l'autre inclusion, on exploite la surjectivité de $D_e\Pi$ et la non-dégénérescence de $\omega_{\Pi(e)}$. \blacksquare

1.8.2 Structure symplectique sur les orbites coadjointes.

On considère l'action coadjointe d'un groupe de Lie G sur le dual de son algèbre de Lie \mathfrak{g}^* donnée par

$$\forall g \in G, \forall f \in \mathfrak{g}^*, \forall \xi \in \mathfrak{g}, Ad^*(g) \cdot f(\xi) = f(Ad(g^{-1})(\xi)).$$

Voici un théorème fondamental dû à Kirillov, Kostant et Souriau concernant les orbites coadjointes.

THÉORÈME 1.5 —

Chaque orbite coadjointe O_f où $f \in \mathfrak{g}^*$ est munie d'une structure symplectique induite par f .

Démonstration

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et soit $G_f := \{g \in G \mid Ad^*(g) \cdot f = f\}$ le stabilisateur de f pour l'action coadjointe. Puisqu'il existe un difféomorphisme G -équivariant de G/G_f sur O_f , il suffit de montrer que G/G_f est un espace homogène symplectique (car on peut transporter alors la structure symplectique obtenue sur G/G_f en une structure symplectique sur O_f via ce difféomorphisme). Poussant f par translation à gauche sur G , on obtient une 1-forme différentielle sur G (invariante à gauche par construction) que l'on note α . Soit alors ω la différentielle extérieure de α ; il s'agit d'une 2-forme fermée invariante à gauche.

Faisons maintenant la remarque suivante, absolument essentielle : si $\eta, \xi \in \mathfrak{g}$, alors $\omega_e(\xi, \eta) = d\alpha_e(\xi, \eta) = -\alpha_e([\xi, \eta]) = -f([\xi, \eta])$. En effet, la formule $d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])$, valide pour tous champs de vecteurs X, Y sur G , se simplifie lorsque X et Y sont des champs de vecteurs invariants à gauche.

Il devient alors clair que l'algèbre de Lie de G_f , notée \mathfrak{g}_f et égale à l'ensemble $\{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g}, f([\xi, \eta]) = 0\}$ est aussi l'ensemble $\{\xi \in \mathfrak{g} \mid i_\xi(\omega_e) = 0\}$.

De plus, ω_e est invariante sous l'action adjointe de G_f sur \mathfrak{g} ; pour le voir, on considère l'application $g \mapsto \omega_e(Ad(g)\xi, Ad(g)\eta)$ définie sur G_f et on regarde sa différentielle en e . Or pour tout $X \in \mathfrak{g}_f$,

$$\begin{aligned} \omega_e([X, \xi], \eta) + \omega_e(\xi, [X, \eta]) &= -f([X, \xi], \eta) - f([\xi, X], \eta) \\ &= -f([X, [\xi, \eta]]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. Alors la proposition 20 montre que ω induit une 2-forme différentielle sur G/G_f qui est invariante sous l'action de G sur G/G_f par translation à gauche. De plus, cette forme est fermée et partout non-dégénérée car $\mathfrak{g}_f = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid i_\xi(\omega_e) = 0\}$.

Cela achève la démonstration. \blacksquare

6. Par exemple, pour le cas où $p = 2$, cela veut dire $\forall \xi \in \mathfrak{h}, \forall \eta \in \mathfrak{g}, \theta_e(\xi, \eta) = 0$.

Remarque

Le théorème précédent fournit donc l'existence d'une structure symplectique sur O_f et permet aussi d'expliciter une telle structure.

Néanmoins, il ne garantit pas l'unicité d'une telle structure. \square

Dès lors, on peut se demander sous quelles hypothèses la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur une orbite coadjointe est unique.

On va énoncer un résultat dans le cas où l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est supposée semi-simple.

On rappelle que dans ce cas, la forme de Killing $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ associée est non-dégénérée; elle induit par conséquent un isomorphisme naturel $\psi_{\mathfrak{g}}$ entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* (qui est en outre G -équivariant pour les actions adjointe et coadjointe car $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ est $Ad(G)$ -invariante). De plus, selon l'un des lemmes de Whitehead, le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} (à valeurs dans le \mathfrak{g} -module trivial \mathbb{R}) est nul.

Mettons ces remarques en application dans le cadre des orbites coadjointes. On énonce d'abord le lemme suivant.

Lemme 6 *Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} semi-simple et si f désigne un élément de \mathfrak{g}^* , alors*

$$\mathfrak{g}_f = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f)] = 0\}.$$

Démonstration

Remarquons que

$$\begin{aligned} g \in G_f &\iff \forall \zeta \in \mathfrak{g}, f(Ad_{g^{-1}}(\zeta)) = f(\zeta) \\ &\iff \forall \zeta \in \mathfrak{g}, \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f), Ad_{g^{-1}}(\zeta)) = f(\zeta) \\ &\iff \forall \zeta \in \mathfrak{g}, \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(Ad_g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f)), \zeta) = \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f), \zeta) \\ &\iff Ad_g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f)) = \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(f). \end{aligned}$$

Le résultat en découle après dérivation. \blacksquare

Proposition 22 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} semi-simple et soit f un élément de $\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$.*

On suppose que l'action adjointe ad de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_f sur \mathfrak{g} ne possède qu'une seule droite vectorielle de points fixes.

Alors la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'orbite coadjointe de f est (essentiellement) unique; plus précisément, si ω désigne une forme symplectique sur O_f et si Ω désigne la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur cette orbite coadjointe, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^$ tel que $\omega = \lambda\Omega$.*

Démonstration

Le même argument que celui donné au début de la preuve du théorème de Kirillov-Kostant-Souriau montre que l'on peut remplacer O_f par G/G_f dans l'énoncé précédent.

On se donne alors ω une forme symplectique sur G/G_f . Celle-ci détermine de manière unique (d'après la proposition 20) une 2-forme θ sur G invariante à gauche telle que θ_e est $Ad(G_f)$ -invariante et telle que $\mathfrak{g}_f = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid i_{\xi}(\theta_e) = 0\}$.

En utilisant $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ et la formule générale $d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])$, on voit qu'il existe une 1-forme α sur G invariante à gauche telle que $\theta = d\alpha$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_f &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g}, \alpha_e([\xi, \eta]) = 0\} \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g}, \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\alpha_e), [\xi, \eta]) = 0\} \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g}, \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}([\xi, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\alpha_e)], \eta) = 0\} \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g}, [\xi, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\alpha_e)] = 0\}. \end{aligned}$$

Il résulte de cela et du lemme 6 que les droites dans \mathfrak{g} dirigées par $\psi_{\mathfrak{g}}(\alpha_e)$ et $\psi_{\mathfrak{g}}(f)$ sont laissées invariantes par l'action adjointe de \mathfrak{g}_f . Par hypothèse, elles doivent être les mêmes. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\psi_{\mathfrak{g}}(\alpha_e) = \lambda\psi_{\mathfrak{g}}(f)$, c'est-à-dire $\alpha_e = \lambda f$.

La correspondance biunivoque donnée par la proposition 20, utilisée dans l'autre sens, garantit finalement le résultat souhaité. \blacksquare

Pour terminer cette partie, on donne aussi le théorème suivant qui permet sous des conditions particulières de réaliser certaines orbites coadjointes comme ouverts d'un fibré cotangent. On n'utilisera pas ce théorème dans la suite.

THÉOREME 1.6 (DE WOLF) —

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} .

Soit f un élément de \mathfrak{g}^* . On note G_f le stabilisateur de f pour l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* et \mathfrak{g}_f l'algèbre de Lie de G_f .

On suppose :

1. $\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_f)$
2. $\forall x \in \mathfrak{h}, f(x) = 0$
3. $G_f \subset H$.

Alors il existe un symplectomorphisme G -équivariant de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_f := \text{Ad}_G^*(f)$ munie de la forme de Kirillov-Kostant-Souriau Ω (donnée par $\Omega_f(u, v) = f([u, v])$ pour $(u, v) \in T_f^*(\mathcal{O}_f) \subset \mathfrak{g}$) sur une orbite ouverte de G dans $T^*(G/H)$ munie de la forme symplectique canonique.

Démonstration

Montrons l'existence d'un difféomorphisme G -équivariant entre \mathcal{O}_f et une orbite ouverte pour l'action de G sur $T^*(G/H)$. Rappelons d'abord que l'espace quotient G/H est bien muni d'une structure de variété et que la projection canonique $G \rightarrow G/H$ définit un fibré principal à groupe structural H .

Le fibré cotangent $T^*(G/H)$ est isomorphe au fibré vectoriel associé $G_H[\mathfrak{h}^\perp] = \frac{G \times \mathfrak{h}^\perp}{H}$, où $\mathfrak{h}^\perp = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid \forall x \in \mathfrak{h}, \lambda(x) = 0\}$ et où H agit (à droite) sur $G \times \mathfrak{h}^\perp$ par $h \cdot (g, \xi) = (gh, \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\xi))$, pour $h \in H, (g, \xi) \in G \times \mathfrak{h}^\perp$. On identifiera donc dans la suite $T^*(G/H)$ à $G_H[\mathfrak{h}^\perp]$.

Le groupe G agit à gauche sur $G_H[\mathfrak{h}^\perp]$ via $g' \cdot \overline{(g, \xi)} = \overline{(g'g, \xi)}$. Par hypothèse, f est un élément de \mathfrak{h}^\perp . On note $\tilde{\mathcal{O}}_f$ la G -orbite $G \cdot \overline{(e_G, f)} = \{\overline{(g, f)} \mid g \in G\}$.

On remarque que le stabilisateur de $\overline{(e_G, f)}$ dans G pour cette action est égal à G_f si bien que

$$\begin{aligned} \dim \tilde{\mathcal{O}}_f &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_f \\ &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\perp \\ &= \dim \left(\frac{G \times \mathfrak{h}^\perp}{H} \right) \quad (\text{par hypothèse}) \\ &= \dim G_H[\mathfrak{h}^\perp]. \end{aligned}$$

Ainsi, l'orbite $\tilde{\mathcal{O}}_f$ est ouverte dans $G_H[\mathfrak{h}^\perp] = T^*(G/H)$.

Maintenant, on pose

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{O}_f &\longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_f \\ \text{Ad}_g^*(f) &\longmapsto \overline{(g, f)}. \end{aligned}$$

qui est bien définie. En effet, si $\text{Ad}_g^*(f) = \text{Ad}_{g'}^*(f)$, alors $g'^{-1}g \in G_f$, c'est-à-dire $\exists x \in G_f, g = g'x$ puis $\overline{(g, f)} = \overline{(g'x, f)}$ et comme $x \in G_f \subset H$ par hypothèse, $\overline{(g, f)} = \overline{(g', \text{Ad}_x^*(f))} = \overline{(g', f)}$.

L'application ϕ est clairement lisse, surjective et G -équivariante et si $\overline{(g, f)} = \overline{(g', f)}$, alors $\overline{(g'g^{-1}, f)} = \overline{(e_G, f)}$, donc $g'^{-1}g \in G_f$ et enfin $\text{Ad}_g^*(f) = \text{Ad}_{g'}^*(f)$.

A ce stade, on a donc montré que ϕ est une bijection lisse. De plus, on peut expliciter un inverse pour ϕ et il est immédiat de constater que cet inverse est lisse.

Enfin, ϕ est symplectique ; c'est une conséquence de la G -équivariance. ■

2 Systèmes intégrables et super-intégrables.

Le but de ce volet est de décrire les propriétés d'une classe particulière importante de systèmes hamiltoniens : les systèmes dits super-intégrables ou encore intégrables au sens non-commutatif.

On commencera par l'étude de la classe plus restreinte des systèmes (complètement) intégrables. Dans un second temps, on généralisera cela aux systèmes super-intégrables ; on verra notamment que la notion géométrique de bifeuillement est cruciale pour la compréhension de tels systèmes. Enfin, on donnera notamment une preuve du théorème de Mischenko-Fomenko pour les systèmes intégrables au sens non-commutatif qui généralise le théorème plus classique d'Arnold-Liouville.

2.1 L'étude des systèmes complètement intégrables.

2.1.1 Définitions et exemples.

C'est essentiellement Liouville qui a contribué au formalisme et à la théorie moderne des systèmes intégrables.

Définition Soient (M, ω, H) un système hamiltonien et F un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$.

On dit que F est une intégrale première du système hamiltonien si le crochet de Poisson $\{H, F\}$ est identiquement nul.

Remarques

- Pour ce qui est de la terminologie, on dit que deux fonctions sont en involution lorsque leur crochet de Poisson est identiquement nul.
- Notons que si f est une intégrale première du système hamiltonien (M, ω, H) , alors f est $\phi_{X_H}^t$ -invariante (on le reverra dans la démonstration du théorème d'Arnold-Liouville plus bas), donc X_f est une symétrie infinitésimale du système hamiltonien, c'est-à-dire $L_{X_f}\omega = 0$ et $[X_f, X_H] = 0$. \square

Remarque

Le hamiltonien H est constant le long des trajectoires du système hamiltonien qu'il définit. Cela s'écrit $X_H \cdot H = 0$ ou $DH(X_H) = 0$ car $\{H, H\} = 0$. Ainsi, H est toujours une intégrale première du système hamiltonien associé. \square

Définition Un système hamiltonien (M, ω, H) sur une variété symplectique de dimension $2n$ est dit complètement intégrable (ou simplement intégrable) s'il existe n intégrales premières F_1, \dots, F_n en involution et s'il existe un ensemble de mesure nulle \mathcal{E} tel que pour tout $x \notin \mathcal{E}$, les différentielles au point x des fonctions F_1, \dots, F_n sont linéairement indépendantes.

Exemples

- Tout système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 2 (autrement dit à un degré de liberté) est complètement intégrable, d'après la remarque précédente.

- Sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, muni de la forme symplectique $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, tout système hamiltonien dont le hamiltonien ne dépend que des coordonnées p_i (c'est-à-dire s'écrit comme une fonction de (p_1, \dots, p_n)) est complètement intégrable. En effet, les fonctions p_i sont alors n intégrales premières en involution dont les différentielles sont en tout point linéairement indépendantes.

- **Le pendule simple.** C'est le système mécanique constitué par une bille (pesante) attachée à une corde (supposée inélastique et sans masse) dont l'autre extrémité est fixe et pour lequel le mouvement de la bille s'effectue dans un plan vertical. Soit θ l'angle (défini modulo 2π) entre la corde du pendule et la verticale. Le mouvement est régi par l'équation de Mathieu donnée par $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$.

L'espace des phases est le fibré cotangent T^*S^1 identifié au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Soient q une variable réelle dont θ est la réduction modulo 2π et $p = \dot{q}$. Le hamiltonien correspondant au système est donné par $H(q, p) := \frac{1}{2}p^2 - \cos q$. L'équation différentielle de Mathieu est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin q, \end{cases}$$

qui sont les équations de Hamilton pour le système hamiltonien associé à la fonction H .

En raison de la dimension de l'espace des phases, le système hamiltonien du pendule simple est donc complètement intégrable.

- **Le pendule sphérique.** C'est le système mécanique constitué par une bille (pesante) attachée à une corde (supposée inélastique et sans masse) dont l'autre extrémité est fixe et pour lequel le mouvement de la bille s'effectue dans l'espace euclidien de dimension 3 sur une sphère centrée à l'extrémité fixe de la corde.

De façon hamiltonienne, il s'agit du système dont l'espace des phases est le fibré cotangent de la sphère S^2 que l'on identifie à $\{(q, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|q\| = 1 \text{ et } \langle q, p \rangle = 0\}$ et dont le hamiltonien est la fonction H dont l'expression est $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + \langle e_z, q \rangle$ (en notant e_z le vecteur de base "vertical" dans \mathbb{R}^3). Le système est clairement invariant par les rotations autour de l'axe vertical (dirigé par e_z), donc on a une deuxième intégrale première du système hamiltonien $(T^*S^2, \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i, H)$ donné par le moment par rapport à l'axe vertical, qui est K donnée par $K(q, p) = \langle q \times p, e_z \rangle$.

Donnons une explication géométrique du fait que $\{H, K\} = 0$.

Le champ hamiltonien associé à K a pour expression $X_K(q, p) = (q \times e_z, p \times e_z)$; par conséquent, le flot de X_K consiste à appliquer les rotations par rapport à l'axe vertical : on a précisément $\phi_{X_K}^t(q, p) = (R_t q, R_t p)$.⁷ Or, ce flot préserve le fibré cotangent de S^2 (puisque, pour tout t , R_t est un élément de $O(3)$) et laisse H invariant puisqu'il laisse le vecteur vertical e_z invariant. Autrement dit, on a $H \circ \phi_{X_K}^t(x) = H(x)$ pour tout t . En dérivant en $t = 0$, on a $D_x H(X_K(x)) = 0$, ce que l'on voulait exactement.

Le pendule sphérique est donc bien un système complètement intégrable.

- **Le flot géodésique des surfaces de révolution.** On considère ici la surface de révolution Σ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (de base standard (e_x, e_y, e_z)) engendrée par la courbe "méridienne" dans le plan (O, e_x, e_z) paramétrée par la longueur d'arc via

$$\begin{aligned}]a, b[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longmapsto (F(s), 0, G(s)). \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \phi :]a, b[\times \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, \theta) &\longmapsto (F(s) \cos \theta, F(s) \sin \theta, G(s)) \end{aligned}$$

est ainsi une immersion injective lisse qui est un difféomorphisme sur Σ .

La donnée d'un vecteur ξ dans l'espace tangent à Σ au point $\phi(s, \theta)$ équivaut à la donnée d'un couple de réels (σ, τ) tel que $\xi = \sigma \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, \theta) + \tau \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(s, \theta)$. La métrique riemannienne g sur Σ obtenue par restriction de la métrique euclidienne standard sur \mathbb{R}^3 est donnée par $g_{\phi(s, \theta)}(\xi, \xi) = \sigma^2 + \tau^2 F(s)^2$, comme on le voit en calculant les dérivées partielles de ϕ et en se rappelant que la courbe "méridienne" est paramétrée par la longueur d'arc.

En somme, le hamiltonien géodésique sur $T^*\Sigma$ est $H(\phi(s, \theta), \xi) = \frac{1}{2} g_{\phi(s, \theta)}(\xi, \xi) = \frac{1}{2} (\sigma^2 + \tau^2 F(s)^2)$.

Maintenant, on a un système de coordonnées globales symplectiques sur $T^*\Sigma$ fourni par l'application

$$\begin{aligned} \Phi : T^*\Sigma &\longrightarrow]a, b[\times \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (\phi(s, \theta), \xi) &\longmapsto (s, \theta, p_s, p_\theta) := (s, \theta, \sigma, F(s)^2 \tau). \end{aligned}$$

Le système hamiltonien géodésique $(T^*\Sigma, H)$ est donc équivalent au système hamiltonien $(]a, b[\times \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tilde{H})$, où $\tilde{H}(s, \theta, p_s, p_\theta) := (\Phi^{-1})^* H = \frac{1}{2} \left(p_s^2 + \frac{1}{F(s)^2} p_\theta^2 \right)$. Les équations de Hamilton associées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{s} = p_s \\ \dot{\theta} = \frac{1}{F(s)^2} p_\theta \\ \dot{p}_s = \frac{F'(s)}{F(s)^3} p_\theta^2 \\ \dot{p}_\theta = 0. \end{cases}$$

Il en résulte notamment que la fonction coordonnée p_θ est une deuxième intégrale première, de sorte que le système hamiltonien étudié est également intégrable.

2.1.2 Propriété des systèmes intégrables et théorème d'Arnold-Liouville.

Le théorème d'Arnold-Liouville ci-dessous va permettre d'exhiber une propriété fondamentale des systèmes complètement intégrables.

⁷. C'est pour cela que K est le moment par rapport à l'axe vertical.

THÉORÈME 2.1 (D'ARNOLD-LIOUVILLE) —

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$.

On se donne des fonctions $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\{F_i, F_j\} = 0$.

Soient $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et $M_z := \{x \in M \mid \forall i, F_i(x) = z_i\}$. On suppose que pour tout $x \in M_z$ les différentielles $D_x F_1, \dots, D_x F_n$ sont linéairement indépendantes.

Alors on a les conclusions suivantes :

1. M_z est une sous-variété lagrangienne de M qui est invariante sous l'action des flots hamiltoniens $\phi_{X_{F_i}}^t$ pour $1 \leq i \leq n$.
2. Si M_z est compacte, chaque composante connexe de M_z est difféomorphe à un tore \mathbb{T}^n .⁸
3. Si M_z est compacte et connexe, il existe un voisinage ouvert V de M contenant M_z , un ouvert U de \mathbb{R}^n et un symplectomorphisme

$$\Phi : (V, \omega|_V) \longrightarrow (U \times \mathbb{T}^n, \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\varphi_i),$$

avec les coordonnées I_1, \dots, I_n sur U et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sur \mathbb{T}^n tels que le poussé en avant $\Phi_*(F_1, \dots, F_n)$ ne dépende que des variables I_1, \dots, I_n .⁹ Aussi, via un tel difféomorphisme, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction du flot de $\phi_{X_{F_i}}^t$ est conjuguée au flot linéaire sur \mathbb{T}^n .

Avant d'entamer la démonstration du théorème d'Arnold-Liouville, on donne d'abord le lemme suivant et sa démonstration.

Lemme 7 Soit (M, ω) une variété symplectique sur laquelle S^1 agit de manière lisse. On suppose qu'il existe α une 1-forme différentielle sur M telle que $\omega = d\alpha$.

On suppose en outre que le champ fondamental associé à $Y \in \mathbb{R} = \text{Lie}(S^1)$ pour cette action et noté encore Y vérifie $i_Y L_Y \omega = 0$.

Alors Y est globalement hamiltonien et l'application

$$I : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ m \longmapsto \int_{S^1 \cdot m} \alpha$$

est une application moment.¹⁰

En particulier, si $L_Y \omega = 0$, l'action de S^1 sur (M, ω) est hamiltonienne.

Démonstration

La représentation coadjointe de S^1 sur \mathbb{R}^* identifié avec \mathbb{R} est évidemment la représentation triviale; la S^1 -équivariance de I se voit ainsi clairement sur son expression intégrale.

Si l'on montre que pour $m \in M$ et $u \in T_m M$, $D_m I(u) = \omega_m(u, Y(m))$, alors on aura démontré le lemme.

On réécrit $I(m) = \int_0^1 \alpha_{t \cdot m}(Y(t \cdot m)) dt$, où l'on aura identifié bien sûr S^1 avec $[0, 1]/(0 \sim 1)$.

On prolonge u en un champ de vecteurs Z invariant pour l'action de S^1 défini le long de l'orbite de m en posant

$$Z(t \cdot m) := D_m t(u).$$

Puis on prolonge Z en un champ de vecteurs sur M , encore appelé Z .

On a alors :

$$\begin{aligned} D_m I(u) &= \int_0^1 D_{t \cdot m} \alpha(D_m t(u)) \cdot Y(t \cdot m) dt + \int_0^1 \alpha_{t \cdot m}(D_m(Y(t \cdot m)))(u) dt \\ &= \int_0^1 d\alpha_{t \cdot m}(D_m t(u), Y(t \cdot m)) dt + \int_0^1 D_{t \cdot m} \alpha(Y(t \cdot m)) \cdot (D_m t(u)) dt + \int_0^1 \alpha_{t \cdot m}(D_m(Y(t \cdot m)))(u) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{t \cdot m}(Z(t \cdot m), Y(t \cdot m)) dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} (\alpha_{t \cdot m}(D_m t(u))) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{t \cdot m}(Z(t \cdot m), Y(t \cdot m)) dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} (\alpha_{t \cdot m}(Z(t \cdot m))) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{t \cdot m}(Z(t \cdot m), Y(t \cdot m)) dt. \end{aligned}$$

8. Ces composantes connexes sont souvent appelées tores lagrangiens, tores invariants ou encore tores de Liouville.

9. Les coordonnées I_1, \dots, I_n sont appelées variables "action" et les coordonnées $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont les variables "angles".

10. On identifie bien sûr $\text{Lie}(S^1)^*$ avec \mathbb{R} .

Mais, puisque $i_Y L_Y \omega = 0$, l'application $t \mapsto \omega_{t \cdot m}(Z(t \cdot m), Y(t \cdot m))$ est de dérivée nulle ; ainsi cette application est constante, égale à $\omega_m(u, Y(m))$.

D'où le résultat. ■

On en vient maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration

- Notons F l'application $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont les fonctions coordonnées sont données par les F_i , pour $1 \leq i \leq n$.
 Pour $x \in M_z$, la famille $(D_x F_1, \dots, D_x F_n)$ est libre, donc $D_x F$ est de rang n ; cela montre que F est submersive en x .
 Par conséquent, M_z est une sous-variété de M de dimension $2n - n = n$.
 Fixons $x \in M_z$. On a $\omega_x(X_{F_i}(x), u) = -D_x F_i(u)$ pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout $u \in T_x M$. Comme la famille $(D_x F_1, \dots, D_x F_n)$ est libre, la non-dégénérescence de ω_x implique que la famille $(X_{F_1}(x), \dots, X_{F_n}(x))$ est une base de $T_x M_z$.

Or, par hypothèse, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $\omega_x(X_{F_i}(x), X_{F_j}(x)) = \{F_i, F_j\}(x) = 0$. On voit ainsi que $T_x M_z \subset T_x M_z^\perp$; comme ω_x est non-dégénérée, un argument de dimension montre finalement l'égalité, autrement dit, la sous-variété M_z est lagrangienne.

Montrons à présent que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x \in M_z \implies \phi_{X_{F_i}}^t(x) \in M_z.$$

Or, si on fixe un tel $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et si l'on prend $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_j(\phi_{X_{F_i}}^t(x)) &= D_x F_j(X_{F_i}(x)) \\ &= -\omega_x(X_{F_j}(x), X_{F_i}(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto F_j(\phi_{X_{F_i}}^t(x))$ est constante égale à $F_j(x) = z_j$. Cela achève la démonstration du premier point.

- On suppose sans perte de généralité que M_z est compacte et connexe. Notons d'abord que la compacité de M_z garantit que les flots associés aux champs de vecteurs X_{F_i} sont définis sur tout \mathbb{R} . On définit alors une application lisse

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times M_z & \longrightarrow & M_z \\ (t = (t_1, \dots, t_n), x) & \longmapsto & \phi_{X_{F_1}}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_{F_n}}^{t_n}(x) \end{array}.$$

Comme les crochets de Poisson $\{F_i, F_j\}$ sont nuls, on a aussi pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] = X_{\{F_i, F_j\}} = 0.$$

Donc pour $i \neq j$, les flots $\phi_{X_{F_i}}^{t_i}$ et $\phi_{X_{F_j}}^{t_j}$ commutent.

Alors on a pour tous $t, s \in \mathbb{R}^n$, pour tout $x \in M_z$,

$$\alpha(t + s, x) = \alpha(s, \alpha(t, x)).$$

On voit ainsi que α définit une action du groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$ sur la variété M_z .

On montre maintenant que cette action est transitive. Remarquons que puisque l'on a supposé M_z connexe, il suffit de montrer que chaque orbite est ouverte.

Soit $x \in M_z$ et soit y_0 un élément de l'orbite de x pour l'action α . Il existe alors $t_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(t_0, y_0) = x$.

Comme pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t_i}(t_0, y_0) = X_{F_i}(x),$$

la différentielle partielle de α en la variable t est un isomorphisme. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe U voisinage ouvert de t_0 dans \mathbb{R}^n , il existe V voisinage ouvert de y_0 dans M_z et $\varphi : V \rightarrow U$ lisse tels que $\varphi(y_0) = t_0$ et

$$\{(y, t) \in V \times U \mid \alpha(t, y) = x\} = \{(y, \varphi(y)) \mid y \in V\}.$$

Alors V est un ouvert de M_z contenant y_0 et V est inclus dans l'orbite de x pour l'action α . Ainsi, l'orbite de x est ouverte.

Utilisant toujours que $(X_{F_1}(x), \dots, X_{F_n}(x))$ est une base de $T_x M_z$, les applications $t \mapsto \alpha(t, x)$ sont des difféomorphismes locaux pour chaque $x \in M_z$. Ainsi, fixant $x_0 \in M_z$, le stabilisateur H de x_0 dans \mathbb{R}^n est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n , donc est isomorphe à un certain \mathbb{Z}^k , où $0 \leq k \leq n$.

Puisque \mathbb{R}^n agit de manière lisse et transitive sur M_z via α , M_z est difféomorphe au quotient \mathbb{R}^n/H , soit encore à $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Comme M_z est compact, on a finalement $k = n$.

3. Pour ce troisième point, on se limitera dans cette démonstration à la construction de variables "action".

Etape 1 : Montrer qu'il existe un voisinage de M_z diffeomorphe au produit cartésien d'un ouvert de \mathbb{R}^n avec M_z .

On a montré en 1. que z est une valeur régulière de F . Comme l'ensemble des valeurs régulières de F est un ouvert, il existe une boule ouverte U de centre z dans \mathbb{R}^n qui est formée de valeurs régulières si bien que $M_z \subsetneq F^{-1}(U)$.

Comme F est continue et M_z est compacte (donc bornée), il y a un ouvert relativement compact V de M contenant M_z tel que $F(\bar{V}) \subset U$.

On note alors g l'application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

qui est submersive par définition de U .

On affirme que g est propre. En effet, si K désigne un compact de \mathbb{R}^n , alors

$$- g^{-1}(K) = F^{-1}(K \cap U) \cap V$$

- $F^{-1}(K) \cap \bar{V} = F^{-1}(K \cap U) \cap \bar{V}$ est une partie compacte de M car \bar{V} en est une et $F^{-1}(K)$ est fermé dans M . ■

Si on prouve que $F^{-1}(K \cap U) \cap \bar{V} \subset F^{-1}(K \cap U) \cap V$, alors on aura montré à ce stade que $g^{-1}(K)$ est un compact de M . Pour prouver cette inclusion, il suffit de voir que $F^{-1}(K \cap U) \cap \partial V = \emptyset$. Or cela résulte du fait que $K \cap U \cap \partial U = \emptyset$ et de la suite d'inclusions suivante :

$$F^{-1}(K \cap U) \cap \partial V \subset F^{-1}(K \cap U) \cap \partial(F^{-1}(U)) \subset F^{-1}(K \cap U) \cap F^{-1}(\partial U) = F^{-1}(K \cap U \cap \partial U) = \emptyset.$$

Notons qu'on a utilisé pour la deuxième inclusion le fait suivant : $\partial F^{-1}(U) \subset F^{-1}(\partial U)$. Il reste à déduire du fait que $g^{-1}(K)$ est un compact de M que $g^{-1}(K)$ est un compact de V . Or, si $g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts de V , chaque U_i est l'intersection d'un ouvert \tilde{U}_i de M avec V ; ainsi $g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i \cap V \subset \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$. Comme $g^{-1}(K)$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue dans M , il existe J un sous-ensemble fini de I tel que $g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in J} \tilde{U}_i$. Mais alors aussi

$$g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in J} \tilde{U}_i \cap V = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Cela achève la démonstration de la propriété de g .

Comme $g : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ est une submersion propre, le théorème de fibration d'Ehresmann garantit que g est une fibration lisse localement triviale (de fibre type $g^{-1}(\{z\}) = M_z$). Ainsi, quitte à réduire U et V , il existe un diffeomorphisme lisse $\tau : U \times M_z \rightarrow V$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} U \times M_z & \xrightarrow{\tau} & V \\ & \searrow p \circ \tau & \downarrow g \\ & & U \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $u \in U$, on a $g^{-1}(\{u\}) = \tau(\{u\} \times M_z)$. Donc toutes les fibres $g^{-1}(\{u\})$ pour $u \in U$ sont des tores.

Etape 2 : Construire une action du groupe de Lie \mathbb{T}^n sur un voisinage de M_z .

Le paragraphe qui suit montre que l'on peut trouver des fonctions T_1, \dots, T_n de classe C^∞ sur U telles que pour tout $u \in U$, $(T_1(u), \dots, T_n(u))$ est une base du stabilisateur d'un point de V pour l'action de \mathbb{R}^n . Cela permet de définir des champs de vecteurs Y_i à partir des X_{F_i} qui commutent (de même que les X_{F_i}) mais qui ont en plus la propriété que les flots $\phi_{Y_i}^t$ sont périodiques de période 1; ainsi on aura une action lisse de \mathbb{R}^n sur V qui descendra en une action lisse de \mathbb{T}^n sur V . Cette dernière action est nécessaire à la définition des variables action. Il semble essentiel (à cause de la "périodicité") d'avoir affaire à une action de $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ et non pas simplement de \mathbb{R}^n .

Fixons pour la suite $p_0 \in M_z$. Alors il existe un unique couple $(u_0, p) \in U \times M_z$ tel que $\tau(u_0, p) = p_0$. Nécessairement $u_0 = z$, par définition de M_z . L'application

$$\begin{aligned} \sigma : U &\longrightarrow V \\ u &\longmapsto \tau(u, p) \end{aligned}$$

est alors une section de g qui vérifie $\sigma(u_0) = p_0$.

L'intérêt d'une telle section est de montrer que les tores de Liouville $g^{-1}(u)$ (où $u \in U$) que l'on identifie aux quotients $\mathbb{R}^n / \text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(\sigma(u))$ se déforment de manière lisse au voisinage de M_z (unique dépendance en u et dépendance \mathcal{C}^∞), au sens où il existe une famille de bases des stabilisateurs de $\sigma(u)$ qui dépend de manière \mathcal{C}^∞ de u .

Soit $t_0 \in \text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p_0)$.

Il s'agit de noter qu'en les points de V (qui sont réguliers), les champs de vecteurs X_{F_i} sont indépendants et ces champs sont complets sur V puisque les fibres $g^{-1}(\{u\})$ pour $u \in U$ sont compactes. De plus, comme pour 1., on montre que $x \in g^{-1}(\{u\}) \implies \Phi_{X_{F_i}}^t(x) \in g^{-1}(\{u\})$ pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$. L'action α s'étend donc en une action de \mathbb{R}^n sur V que l'on notera \cdot et telle que $\mathbb{R}^n \cdot g^{-1}(\{u\}) = g^{-1}(\{u\})$ pour tout $u \in U$.

Ainsi, pour tout $u \in U$, $\mathbb{R}^n \cdot \sigma(u) \subset g^{-1}(\{u\}) = \tau(\{u\} \times M_z)$. La continuité des applications \cdot et σ permet alors d'affirmer l'existence d'un voisinage ouvert A de t_0 dans \mathbb{R}^n et d'un voisinage ouvert B de p dans M_z tels que

$$t \in A \text{ et } u \in U \implies t \cdot \sigma(u) \in \tau(\{u\} \times B).$$

Puisque B est un ouvert inclus dans M_z et que M_z est un tore, on a naturellement une structure affine sur B induite par celle de \mathbb{R}^n .

Ce qui précède fournit donc une application

$$\begin{aligned} \theta : A \times U &\longrightarrow B \\ (t, u) &\longmapsto \text{pr}_2(\tau^{-1}(t \cdot \sigma(u))) - p, \end{aligned}$$

la différence étant bien entendu comprise au sens de la structure affine sur B . On a ainsi

$$\theta(t, u) = 0 \iff (u, \text{pr}_2(\tau^{-1}(t \cdot \sigma(u)))) = (u, p) \iff \tau^{-1}(t \cdot \sigma(u)) = \tau^{-1}(\sigma(u)) \iff t \cdot \sigma(u) = \sigma(u) \iff t \in \text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(\sigma(u));$$

en particulier $\theta(t_0, p_0) = 0$.

De plus, la différentielle partielle $D_{(t,u)}^{(t)}\theta$ de θ par rapport à la variable t prise au point $(t, u) \in A \times U$ est composée de la différentielle de $t \mapsto t \cdot \sigma(u)$ (qui est de rang n puisque les vecteurs $X_{F_i}(\sigma(u))$, $1 \leq i \leq n$, sont linéairement indépendants), suivie de la différentielle $D_{t \cdot \sigma(u)}\tau^{-1}$ du difféomorphisme τ^{-1} , suivie de la projection sur la deuxième composante (qui est également de rang n). Ainsi, la différentielle partielle $D_{(t,u)}^{(t)}\theta$ est un isomorphisme. Par conséquent le théorème des fonctions implicites fournit l'existence d'un voisinage U' de u_0 dans U , l'existence d'un voisinage A' de t_0 dans A et l'existence d'une fonction $T : U' \rightarrow A' \subset \mathbb{R}^n$ lisse telle que

$$\begin{cases} T(u_0) = t_0 \\ \{(t, u) \in A' \times U' \mid t \cdot \sigma(u) = \sigma(u)\} = \{(T(u), u) \mid u \in U'\}. \end{cases}$$

En faisant parcourir à t_0 une base (t_0^1, \dots, t_0^n) du réseau $\text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(p_0)$ et en faisant n fois le raisonnement précédent où l'on remplace t_0 par les t_0^i ($1 \leq i \leq n$), on obtient n fonctions lisses $T_i : U'_i \subset U \rightarrow A'_i$ telles que pour $u \in \tilde{U} := \bigcap_{i=1}^n U'_i$, une base du réseau $\text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(\sigma(u))$ soit donnée par $(T_1(u), \dots, T_n(u))$ (qui dépend de manière \mathcal{C}^∞ de u).

Pour $u \in \tilde{U}$, écrivant $T_i(u)$ dans la base canonique $(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n})$ de \mathbb{R}^n sous la forme

$$T_i(u) = \sum_{j=1}^n T_{i,j}(u) \frac{\partial}{\partial t_j},$$

on définit n champs de vecteurs Y_1, \dots, Y_n sur $\tilde{V} := F^{-1}(\tilde{U}) \subset V$ via la formule

$$\forall v \in \tilde{V}, Y_i(v) = \sum_{j=1}^n T_{i,j}(F(v)) X_{F_j}(v),$$

valable pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ces champs de vecteurs sont lisses car les $T_{i,j}$ le sont.

Puisque la matrice des $T_{i,j}(F(v))$ est inversible et que $(X_{F_1}(v), \dots, X_{F_n}(v))$ est une famille libre de $T_v\tilde{V}$, on voit que la famille $(Y_1(v), \dots, Y_n(v))$ est une famille libre de $T_v\tilde{V}$.

De plus, le flot de Y_i correspondant (qui est complet) est :

$$\begin{aligned} \phi_{Y_i}^t &: \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V} \\ p &\longmapsto \phi_{X_{F_1}}^{tT_{i,1}(F(p))} \circ \dots \circ \phi_{X_{F_n}}^{tT_{i,n}(F(p))}(p) \end{aligned}$$

Comme $(T_{i,1}(F(p)), \dots, T_{i,n}(F(p))) = T_i(F(p)) \in \text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(\sigma(F(p)))$, $\phi_{Y_i}^{t+1}(p) = \phi_{Y_i}^t(p)$; cela veut exactement dire que les flots sont périodiques de période 1. Comme $[Y_i, Y_j] = 0$ (car $[X_{F_k}, X_{F_l}] = 0$ pour tout k, l), les flots des Y_i commutent. On obtient ainsi l'action lisse :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \tilde{V} &\longrightarrow \tilde{V} \\ (t = (t_1, \dots, t_n), p) &\longmapsto \phi_{Y_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{Y_n}^{t_n}(p) \end{aligned}$$

qui descend naturellement en une action lisse de $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sur \tilde{V} .

Etape 3 : Montrer qu'il existe un voisinage de M_z sur lequel la restriction de la forme ω admet une primitive.

On montre à présent que $\omega|_{\tilde{V}}$ est exacte.

On a déjà noté que pour tout $x \in M_z$, ω_x est nulle sur la base $(X_{F_1}(x), \dots, X_{F_n}(x))$. En particulier la classe de la 2-forme différentielle fermée $\omega|_{M_z}$ dans l'espace de cohomologie de de Rham $H^2(M_z, \mathbb{R})$ est la classe nulle. Or, on a fait le choix d'une boule pour U (de centre z), donc $\{z\} \times M_z$ est un rétracte par déformation de $U \times M_z$. Alors, notant $i : \{z\}M_z \hookrightarrow U \times M_z$ l'injection canonique, l'application $\tau \circ i : \{z\} \times M_z$ est une équivalence d'homotopie. Cette dernière induit une application en cohomologie qui est un isomorphisme entre les espaces $H^2(M_z, \mathbb{R})$ et $H^2(V, \mathbb{R})$. Par conséquent, la classe de $\omega|_V$ dans $H^2(V, \mathbb{R})$ est la classe nulle; autrement dit $\omega|_V$ est exacte. Mais alors, $\omega|_{\tilde{V}}$ est aussi exacte. On note alors α une primitive de la forme $\omega|_{\tilde{V}}$ sur \tilde{V} .

Etape 4 : Construire les variables "action" et montrer que l'action de \mathbb{T}^n construite à l'étape 2 est hamiltonienne.

On est alors en mesure de définir les variables "action". Pour $v \in \tilde{V}$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit d'abord une application lisse

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(v)} : [0, 1] &\longrightarrow \tilde{V} \\ t &\longmapsto \phi_{Y_i}^t(v) \end{aligned}$$

qui est un lacet de \tilde{V} car $\phi_{Y_i}^1(v) = v = \phi_{Y_i}^0(v)$. Cette application permet en outre de définir de manière évidente une action lisse de $[0, 1]$ sur \tilde{V} qui elle-même induit par passage au quotient une action lisse de S^1 sur \tilde{V} , notée \diamond .

On pose alors

$$I_i(v) := \int_{S^1 \diamond v} \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma_i^{(v)}(t)}(\dot{\gamma}_i^{(v)}(t)) dt.$$

Si on montre que chacun des champs fondamentaux Y_i satisfait à la relation $i_{Y_i} L_{Y_i} = 0$, alors lemme 7 permet de conclure que les I_i sont des applications moment.

Or, d'après la formule $L_{Y_i} = i_{Y_i} d + di_{Y_i}$, on a $i_{Y_i} L_{Y_i} \omega = i_{Y_i} di_{Y_i} \omega$. De plus, il est immédiat de constater que

$$i_{Y_i} \omega_v(u) = - \sum_j T_{i,j}(F(v)) D_v F_j(u),$$

si bien que

$$\begin{aligned} i_{Y_i} L_{Y_i} \omega &= -i_{Y_i} d \left(\sum_j (T_{i,j} \circ F) dF_j \right) \\ &= -i_{Y_i} \left(\sum_j d(T_{i,j} \circ F) \wedge dF_j \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

la dernière ligne provenant du fait que $D_v F_j(Y_i(v)) = 0$ et que $D_v(T_{i,j} \circ F)(Y_i(v)) = 0$ car $Y_i(v) \in T_v(F^{-1}(\{F(v)\}))$ et $T_{i,j} \circ F$ est constante sur chaque fibre $F^{-1}(\{F(v)\})$.

L'application $I : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont les fonctions coordonnées sont les I_i est une application de rang n . En effet, on a d'après la démonstration du lemme 7, $D_v I(x) = (\omega_v(x, Y_1(v)), \dots, \omega_v(x, Y_n(v)))$. L'application linéaire $D_v I$ est de rang n parce que ω_v est non-dégénérée et les vecteurs $Y_i(v)$ sont linéairement indépendants.

D'après ce qui précède, \tilde{V} est muni d'une action hamiltonienne de \mathbb{T}^n dont l'application moment est I . Cette application est constante sur les orbites de l'action de \mathbb{T}^n (parce que c'est une application moment) et $I_i(v)$ ne dépend que de $F(v)$ (par définition de $Y_i(v)$).

L'application $I : \tilde{V} \rightarrow W$ est un fibré principal à groupe structural le groupe de Lie \mathbb{T}^n ; les fibres de I sont des tores lagrangiens.

On termine ce premier paragraphe sur les systèmes complètement intégrables par une conséquence importante du théorème d'Arnold-Liouville.

Il découle de l'application du théorème d'Arnold-Liouville avec un hamiltonien H à la place de l'une des fonctions F_i que le mouvement décrit par un système hamiltonien complètement intégrable est régulier. En effet, les trajectoires s'enroulent sur des tores et le flot hamiltonien est linéaire sur ces tores. Ou bien le flot hamiltonien est périodique ou bien chaque trajectoire revient arbitrairement proche du point initial : on parle de mouvement quasi-périodique.

2.2 Systèmes intégrables au sens non-commutatif et bifeuillements.

On étudie ici des systèmes qui ont plus de n intégrales premières si n désigne le nombre de degrés de liberté.

2.2.1 Définition, exemple et énoncé du théorème de Mischenko-Fomenko.

Définition Un système hamiltonien (M^{2n}, ω, H) est dit intégrable au sens non-commutatif ou encore super-intégrable s'il existe $d \leq n$ et $2n - d$ intégrales premières F_1, \dots, F_{2n-d} telles que, si F est l'application $M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$ dont les fonctions coordonnées sont les F_i , pour tous i, j , il existe $P_{ij} : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

- $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$,
- si $P = [P_{ij}]$, pour tout $x \in M$, $\text{rg}(P(F(x))) = 2n - 2d$.

Remarques

- Les F_1, \dots, F_{2n-d} forment une algèbre de Lie avec comme crochet de Lie le crochet de Poisson qui est non-commutative si les P_{ij} ne sont pas tous nuls, d'où le terme d'intégrabilité au sens non-commutatif.
- Tout système intégrable est bien sûr intégrable au sens non-commutatif.
- S'il existe $d < n$ tel que la définition précédente soit vérifiée, on dit que le système est dégénéré. \square

On verra que la théorie des systèmes intégrables au sens non-commutatif n'est en fait que la généralisation de la théorie des systèmes complètement intégrables exposée plus haut.

Voici un exemple de système dégénéré qui va permettre d'ores et déjà d'illustrer cela : le système d'Euler-Poinsot. Il s'agit du système mécanique constitué d'un solide qui possède un point fixe G (par exemple son centre de masse) par rapport auquel les forces extérieures qui s'y appliquent ont un moment nul et qui est en mouvement autour de ce point fixe dans l'espace euclidien standard de dimension 3.

Prenant une base orthonormée directe (fixe) \mathcal{B} de cet espace et un repère orthonormé direct mobile (G, \mathcal{B}') (\mathcal{B}' désigne une base orthonormée directe "mobile") attaché au solide, la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' définit un élément de $SO(3)$ qui décrit en quelque sorte la position dans l'espace du solide.

L'espace des phases est ici la variété symplectique $T^*(SO(3))$ de dimension 6 que l'on peut identifier à $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. L'énergie mécanique H (dont l'expression se réduit ici à celle de l'énergie cinétique) et les composantes (M_x, M_y, M_z) du moment angulaire écrites dans la base \mathcal{B} forment quatre intégrales premières du système hamiltonien $(T^*(SO(3)), H)$ en vertu du théorème de Noether, puisqu'on constate que H est invariante par les rotations autour de G .

Dès lors, il est possible de donner qualitativement quelques précisions topologiques et dynamiques concernant le mouvement décrit par le système d'Euler-Poinsot.

D'abord, on peut vérifier que dans le cas générique où le solide ne présente aucune symétrie particulière, les différentielles des fonctions H, M_x, M_y, M_z sont en tout point linéairement indépendantes de sorte que les équations $H = e, M_x = c_x, M_y = c_y, M_z = c_z$ définissent une sous-variété M de $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ de dimension 2 qui est orientable (en utilisant que $T^*(SO(3))$ l'est puisqu'il s'agit d'une variété symplectique).

De plus, cette surface M est invariante au cours du mouvement : si les conditions initiales du mouvement fournissent un point dans M , alors pendant toute la durée du mouvement, le point de $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ qui correspond à la position et à la vitesse dans la base \mathcal{B}' du solide est encore dans M . Aussi, il existe un champ de vecteurs sur M qui ne prend jamais la valeur nulle.

Enfin, on voit que M est fermée et bornée (notamment grâce à l'expression de H comme somme de termes positifs) dans $SO(3) \times \mathbb{R}^3$, donc compacte.

Or, il est bien connu de par la classification des surfaces que les seules sous-variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont S^2 et les surfaces à g trous (ou de genre $g \geq 1$). D'autre part, si la caractéristique d'Euler d'une surface est non-nulle, alors tout champ de vecteurs sur cette surface doit s'annuler au moins une fois. On en conclut que M est nécessairement un ou une réunion de tore(s) \mathbb{T}^2 .

Le théorème suivant montre notamment que l'exemple précédent est loin d'être isolé; il étend le théorème d'Arnold-Liouville aux systèmes dégénérés.

THÉORÈME 2.2 (DE MISCHENKO-FOMENKO) —

Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique.

On suppose qu'il existe $d \leq n$ et une submersion $F = (F_1, \dots, F_{2n-d}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$ de fibres compactes et connexes telle que $\forall i, j, \exists P_{ij} : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

- $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$,

- si $P = [P_{ij}]$, pour tout $x \in M$, $\text{rg}(P(F(x))) = 2n - 2d$.

Alors chaque fibre de F est difféomorphe à un tore \mathbb{T}^d et a un voisinage U tel qu'il existe Ω un ouvert de \mathbb{R}^{2n-d} et un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow \Omega \times \mathbb{T}^d$ tels que :

1. $\forall x \in U, F^{-1}(\{F(x)\}) = (pr_1 \circ \phi)^{-1}(\{F(x)\})$,
2. écrivant $pr_1 \circ \phi(x) = (p_1(x), \dots, p_{n-d}(x), q_1(x), \dots, q_{n-d}(x), a_1(x), \dots, a_d(x))$ et $pr_2 \circ \phi(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_d(x))$,

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n-d} dp_i \wedge dq_i + \sum_{i=1}^d da_i \wedge d\alpha_i.$$

Remarques

- Les coordonnées locales a_1, \dots, a_d et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont appelées respectivement coordonnées actions et angles. Les coordonnées locales $p_1, \dots, p_{n-d}, q_1, \dots, q_{n-d}, a_1, \dots, a_d, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont dites coordonnées actions-angles généralisées.
- Grâce à ces coordonnées locales, la dynamique d'un système intégrable au sens non-commutatif (M^{2n}, ω, H) se décrit aisément. Comme les tores (ici plus nécessairement lagrangiens) données par $\{F = cste\}$ sont invariants sous le flot de X_H , le hamiltonien H exprimé dans les coordonnées actions-angles généralisées p, q, a, α (qui définit localement une nouvelle fonction notée h) ne dépend que des variables actions a_1, \dots, a_d . Ainsi, les équations de Hamilton s'écrivent localement :

$$\begin{cases} \dot{a}_i = 0 \\ \dot{p}_i = 0 \\ \dot{q}_i = 0 \\ \dot{\alpha}_i = \frac{\partial h}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_d) \end{cases}$$

- Si $d = n$, et $P = 0$, le théorème se réduit au théorème d'Arnold-Liouville. □

En outre, revenant à l'exemple du système d'Euler-Poinsot, on déduit que l'on peut trouver en particulier des coordonnées angulaires α_1, α_2 (définies modulo 2π) sur chacun des tores invariants $\{H = e, M_x = c_x, M_y = c_y, M_z = c_z\}$ sur lesquels le mouvement est donné par des équations du type

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \omega_1 \\ \dot{\alpha}_2 = \omega_2, \end{cases}$$

où ω_1 et ω_2 sont des constantes réelles. Ce système est exactement celui d'un flot linéaire comme c'était déjà le cas pour les systèmes complètement intégrables.

Autrement dit, le mouvement à conditions initiales fixées d'un solide autour de son centre de masse (qui, comme on l'a vu, s'effectue dans l'espace des phases sur un tore) peut être représenté par la "superposition" de deux mouvements périodiques ; de plus, si le couple de réels (ω_1, ω_2) est lié sur \mathbb{Q} , alors le mouvement est périodique sur le tore (le solide retrouve sa position initiale) tandis que si (ω_1, ω_2) forme un système de vecteurs libres sur \mathbb{Q} , alors le solide ne retrouve jamais sa position initiale mais le flot va toujours passer à une distance arbitrairement proche du point initial sur le tore.

La quasi-périodicité du mouvement, qui existait déjà pour le cas des systèmes complètement intégrables, s'étend donc à tous les systèmes intégrables au sens non-commutatif grâce au théorème de Mischenko et Fomenko.

Mentionnons par ailleurs que les systèmes intégrables au sens non-commutatif sont "localement" des systèmes complètement intégrables via les coordonnées actions-angles généralisées. En effet, un ensemble de n intégrales en involution est par exemple fourni par d actions a_i et $n - d$ coordonnées p_i . De plus, si les $n - d$ coordonnées q_i peuvent être prises pour variables angles, le domaine où existe ces coordonnées est fibré par des tores de Liouville.

On cherche maintenant à comprendre la structure globale de la fibration F de M donnée par le théorème précédent, ceci afin de mieux comprendre les systèmes dégénérés.

Pour cela, on introduit la notion de bifeuillette qui permettra notamment de donner plus loin des énoncés équivalents au théorème de Mischenko et Fomenko.

2.2.2 Bifeuilletages.

Définition, exemples et propriétés fondamentales.

Définition Soit \mathcal{D} une distribution intégrable sur une variété symplectique (M, ω) .

On dit que \mathcal{D} est symplectiquement complète si la distribution \mathcal{D}^\perp définie par $\forall x \in M, (\mathcal{D}^\perp)_x = (\mathcal{D}_x)^\perp_{\omega_x}$ est intégrable.

Dans ce cas, on dit que \mathcal{D}^\perp est la distribution intégrable polaire (ou duale) de \mathcal{D} et que la donnée du couple $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp)$ est une bidistribution.

Remarques

- D'après le théorème de Frobenius, une distribution est intégrable si et seulement si elle est involutive.
- On rappelle aussi que la donnée d'une distribution intégrable sur M équivaut à la donnée d'un feuilletage sur M . □

Par conséquent, on a également la définition équivalente suivante.

Définition Soit \mathcal{F} un feuilletage de (M, ω) .

On dit que \mathcal{F} est symplectiquement complet s'il existe un feuilletage \mathcal{F}^\perp tel que les espaces tangents des feuilles de \mathcal{F}^\perp soient les orthogonaux symplectiques des espaces tangents des feuilles de \mathcal{F} .

Dans ce cas, on dit que \mathcal{F}^\perp est un feuilletage polaire (ou dual) de \mathcal{F} . On parle aussi du bifeuilletage $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$.

Proposition 23 Si \mathcal{D} est une distribution intégrable de dimension d sur (M^{2n}, ω) symplectiquement complète, alors :

1. \mathcal{D}^\perp est de dimension $2n - d$
2. \mathcal{D}^\perp est symplectiquement complète et $(\mathcal{D}^\perp)^\perp = \mathcal{D}$.

La liste ci-dessous dresse quelques exemples de bidistributions ou bifeuilletages.

- Tout feuilletage lagrangien définit un bifeuilletage puisqu'il coïncide avec son feuilletage dual, nécessairement unique ici.
- Tout champ de vecteurs hamiltonien X_H sur (M^{2n}, ω) définit une distribution intégrable qui est symplectiquement complète. En effet, si \mathcal{D} désigne la distribution engendrée par X_H , on pose $(\mathcal{D}^\perp)_x := \text{Ker } D_x H$; cela définit bien une distribution intégrable. Avec le vocabulaire des feuilletages, on obtient que les orbites de X_H sont les feuilles d'un feuilletage symplectiquement complet; les feuilles du feuilletage polaire sont les composantes connexes des ensembles de niveau de H .
- Les orbites d'une action hamiltonienne et les ensembles de niveau de son application moment forment un bifeuilletage.

Voyons maintenant les propriétés principales des bifeuilletages.

Définition Soit (M, ω) une variété symplectique. On appelle intégrale première d'un feuilletage \mathcal{F} sur M toute fonction f définie sur un ouvert de M qui est constante sur les feuilles de \mathcal{F} .

Autrement dit, si \mathcal{D} est la distribution intégrable associée au feuilletage \mathcal{F} , f est une intégrale première si pour tout $x \in M, \mathcal{D}_x \subset \text{Ker}(D_x f)$.

Lemme 8 f est une intégrale première d'une distribution intégrable \mathcal{D} si et seulement si le champ hamiltonien X_f vérifie $\forall x \in M, X_f(x) \in (\mathcal{D}_x)^\perp_{\omega_x}$.

Proposition 24 Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une variété symplectique (M, ω) . Alors :

1. \mathcal{F} est symplectiquement complet si et seulement si pour toutes intégrales premières f, g de \mathcal{F} , le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est une intégrale première de \mathcal{F} .
2. Si \mathcal{F} est symplectiquement complet,
 - (a) Alors les feuilles de \mathcal{F} sont générées par les flots des champs hamiltoniens associés aux intégrales premières de \mathcal{F}^\perp .
 - (b) f est une intégrale première de \mathcal{F} si et seulement si pour toute intégrale première g de $\mathcal{F}^\perp, \{f, g\} = 0$.

Démonstration

On commence par montrer (1). On appelle \mathcal{D} la distribution intégrable associée à \mathcal{F} .

Supposons dans un premier temps que f et g sont des intégrales premières de \mathcal{F} . Alors d'après le lemme, $X_f, X_g \in \mathcal{D}^\perp$. Donc par hypothèse sur \mathcal{D} , $[X_f, X_g] \in \mathcal{D}^\perp$, c'est-à-dire $X_{\{f,g\}} \in \mathcal{D}^\perp$. Alors $\{f, g\}$ est une intégrale première de \mathcal{F} , toujours d'après le lemme précédent.

Pour la réciproque, on commence par observer que la distribution \mathcal{D}^\perp est engendrée localement par les champs hamiltoniens associés à des intégrales premières de \mathcal{F} . En effet, si $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans M sur lequel sont définies $2n - \dim \mathcal{D}$ fonctions $z_1, \dots, z_{2n - \dim \mathcal{D}}$ qui sont des intégrales premières de \mathcal{F} et dont les différentielles sont partout linéairement indépendantes; pour le voir, il suffit de prendre des coordonnées locales transverses aux feuilles de \mathcal{F} . Via le lemme, les champs hamiltoniens $X_{z_1}, \dots, X_{z_{2n - \dim \mathcal{D}}}$ sont tangents à \mathcal{D}^\perp . Comme ils sont linéairement indépendants et que $\dim \mathcal{D}^\perp = 2n - \dim \mathcal{D}$, on a que $X_{z_1}, \dots, X_{z_{2n - \dim \mathcal{D}}}$ engendrent localement \mathcal{D}^\perp . Maintenant, par hypothèse $\{z_i, z_j\}$ est une intégrale première de \mathcal{F} pour i, j ; donc $X_{\{z_i, z_j\}} \in \mathcal{D}^\perp$, donc $[X_{z_i}, X_{z_j}] \in \mathcal{D}^\perp$. Ainsi \mathcal{D}^\perp est intégrable. D'où \mathcal{F} est symplectiquement complet.

Le point (2) (a) découle de l'observation précédente et de l'unicité des feuilles du feuilletage.

On montre enfin (2) (b). Si f est une intégrale première de \mathcal{F} , on a $\mathcal{D}_x \subset \text{Ker} D_x f$. Soit g une intégrale première de \mathcal{F}^\perp . Alors $X_g \in (\mathcal{D}^\perp)^\perp = \mathcal{D}$ et donc $\{g, f\}(x) = D_x f(X_g(x)) = 0$.

Réciproquement, on se donne $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que pour toute intégrale première g de \mathcal{F}^\perp , $\{f, g\} = 0$. On sait que \mathcal{D} est engendrée localement par des champs hamiltoniens associés à des intégrales premières de \mathcal{F}^\perp ; or, tout champ hamiltonien associé à une intégrale première de \mathcal{F}^\perp vérifie $X_g \in \text{Ker} Df$ puisque $\{f, g\} = 0$. Ainsi, $\mathcal{D} \subset \text{Ker} Df$. ■

Variétés de Poisson et bifeuilletages.

Définition On dit qu'une variété M possède une structure de Poisson si $\mathcal{C}^\infty(M)$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Poisson. Dans ce cas, on dit que M est une variété de Poisson.

Exemple

Toute variété symplectique est naturellement munie d'une structure de Poisson. □

Définition Soient M et N deux variétés de Poisson. On dit que $\pi : M \rightarrow N$ est un morphisme de Poisson si $\{f, g\}_N \circ \pi = \{f \circ \pi, g \circ \pi\}_M$ pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Définition On appelle Casimir (local) sur une variété de Poisson M toute fonction f définie sur un ouvert de M telle que $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M), \{f, g\}|_U = 0$.

Le rang d'une structure de Poisson est la dimension de M moins le nombre de Casimirs locaux indépendants sur M .

Si $\pi : M \rightarrow B$ est une application où B est une variété de Poisson et f est un Casimir sur B défini sur un ouvert U , on appelle relevé à M de f l'application

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f \circ \pi(x). \end{aligned}$$

Proposition 25 Soit $\pi : (M, \omega) \rightarrow B$ une submersion surjective dont les fibres sont connexes. Soit \mathcal{F} le feuilletage de M dont les feuilles sont les fibres de π . Alors :

1. \mathcal{F} est symplectiquement complet si et seulement s'il existe une structure de Poisson sur B pour laquelle π est un morphisme de Poisson.
2. Si \mathcal{F} est symplectiquement complet, les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) Les feuilles de \mathcal{F} sont isotropes, c'est-à-dire $\forall x, \mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_x^{\perp \omega_x}$.
 - (b) Le rang de la structure de Poisson induite sur B vaut $2 \dim B - \dim M$ partout.
 - (c) Les feuilles de \mathcal{F} sont générées par les flots des champs hamiltoniens associés aux relevés à M des Casimirs de B .
 - (d) Les intégrales premières de \mathcal{F}^\perp sont les relevés à M des Casimirs de B .

2.2.3 Enoncés équivalents et preuve du théorème de Mischenko-Fomenko.

La proposition suivante va permettre de retraduire les hypothèses du théorème 2.2.

Proposition 26 1. On considère une submersion $F = (F_1, \dots, F_{2n-d}) : M \rightarrow F(M)$ de fibres compactes et connexes telle que $\forall i, j, \exists P_{ij} : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

- $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$,
- si $P = [P_{ij}]$, pour tout $x \in M$, $\text{rg}(P(F(x))) = 2n - 2d$.

Alors les fibres de F sont isotropes et forment un feuilletage \mathcal{F} de M symplectiquement complet.

2. Toute submersion surjective $\pi : M^{2n} \rightarrow B$ dont les fibres sont compactes, connexes, isotropes de dimension $d \leq n$ et qui induit un feuilletage sur M symplectiquement complet peut être décrite localement par $2n - d$ fonctions F_1, \dots, F_{2n-d} satisfaisant les hypothèses suivantes : $\forall i, j, \exists P_{ij} : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

- $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$,
- si $P = [P_{ij}]$, pour tout $x \in M$, $\text{rg}(P(F(x))) = 2n - 2d$.

Démonstration

1. Il faut noter que toute intégrale première de \mathcal{F} est combinaison linéaire des F_i et que l'hypothèse $\{F_i, F_j\} = P_{ij} \circ F$ implique que $\{F_i, F_j\}$ est encore une intégrale première de \mathcal{F} . Au vu du premier point de la proposition 24, cela montre que \mathcal{F} est symplectiquement complet. D'après la proposition 25, $F(M)$ est donc une variété de Poisson. De plus, pour montrer que les feuilles de \mathcal{F} sont isotropes, il suffit de voir que le point (2) (b) de cette proposition est vérifié. Or cela vient du fait que le rang de la matrice P vaut $2n - 2d = 2 \dim B - \dim M$ et que les coordonnées y_i sur $F(M)$ définies par $y_i(F(x)) = F_i(x)$ pour $x \in M$ vérifient $\{y_i, y_j\}_{F(M)}(F(x)) = \{F_i, F_j\}_M(x) = P_{ij}(F(x))$.

2. Il suffit de voir que pour tout $y \in B$, il existe un voisinage U de y dans B tel que $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ a les mêmes fibres qu'une submersion $F : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$ qui satisfait aux hypothèses explicitées dans la proposition.

Pour cela, on considère un système de coordonnées locales $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$. Alors la composée $F := \hat{f} \circ \pi$ convient puisqu'il s'agit d'une submersion dont les fibres coïncident avec celles de π . De plus, d'après le premier point de la proposition 24 et le second de la proposition 25, les crochets de Poisson $\{F_i, F_j\}$ vérifient bien ce qu'il faut. ■

Ainsi, on voit que le théorème 2.2 est équivalent au théorème suivant :

THÉORÈME 2.3 —

Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique et soit $\pi : M \rightarrow B$ une fibration dont les fibres sont compactes, connexes et isotropes de dimension $d \leq n$. Supposons que le feuilletage \mathcal{F} sur M par les fibres de π est symplectiquement complet.

Alors chaque fibre de F est diffeomorphe à un tore \mathbb{T}^d et a un voisinage U tel qu'il existe Ω un ouvert de \mathbb{R}^{2n-d} et un diffeomorphisme $\phi : U \rightarrow \Omega \times \mathbb{T}^d$ tels que :

1. $\forall x \in U, F^{-1}(\{F(x)\}) = (pr_1 \circ \phi)^{-1}(\{F(x)\})$,
2. écrivant $pr_1 \circ \phi(x) = (p_1(x), \dots, p_{n-d}(x), q_1(x), \dots, q_{n-d}(x), a_1(x), \dots, a_d(x))$ et $pr_2 \circ \phi(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_d(x))$,

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n-d} dp_i \wedge dq_i + \sum_{i=1}^d da_i \wedge d\alpha_i.$$

Ce dernier théorème est lui-même équivalent au

THÉORÈME 2.4 —

Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique.

On suppose qu'il existe $d \leq n$ fonctions $F_1, \dots, F_d : M \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

- $\{F_i, F_j\} = 0$,
- les $D_x F_i$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in M$,
- les sous-variétés intégrales de la distribution engendrée par les champs hamiltoniens X_{F_1}, \dots, X_{F_d} sont compactes et sont les fibres d'une submersion.

Alors chaque composante connexe de ces variétés intégrales est diffeomorphe à un tore \mathbb{T}^d et a un voisinage U sur lequel sont définies des coordonnées actions-angles généralisées (a, p, q, α) telles que

- les variétés intégrales de la distribution engendrée par X_{F_1}, \dots, X_{F_d} sont les ensembles de niveau de l'application (a, p, q) ,
- les coordonnées a_1, \dots, a_d sont fonction de F_1, \dots, F_d , c'est-à-dire il existe $\tilde{a} : F(U) \rightarrow a(U)$ un diffeomorphisme tel que $a = \tilde{a} \circ F$, où $F = (F_1, \dots, F_d)$.

Remarque

Avant de se lancer dans la démonstration proprement dite, voyons pourquoi ce théorème est équivalent au théorème 2.3.

D'abord, sous les hypothèses du théorème 2.4, le feuilletage \mathcal{F} par les sous-variétés intégrales de la distribution engendrée par X_{F_1}, \dots, X_{F_d} est symplectiquement complet ; \mathcal{F}^\perp est donné par les ensembles de niveau de l'application F . Donc le théorème 2.3 implique le théorème 2.4.

Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a une submersion π avec fibres compactes, connexes, isotropes de dimension $d \leq n$ qui induisent un feuilletage symplectiquement complet. Alors localement on peut construire des fonctions F_1, \dots, F_d dont les champs de vecteurs hamiltoniens associés génèrent les fibres (en relevant à M un système de coordonnées locales). \square

Démonstration

Pour chaque $x \in M$, on notera N_x la composante connexe de la variété intégrale de la distribution engendrée par les X_{F_i} passant par x . D'abord, une telle composante connexe N_x est une variété connexe, compacte de dimension d avec $[X_{F_i}, X_{F_j}] = 0$ et les X_{F_i} linéairement indépendants, donc difféomorphe à un tore \mathbb{T}^d comme on l'a vu dans la preuve d'Arnold-Liouville.

Soit maintenant $x_* \in M$ et montrons l'existence de coordonnées actions-angles généralisées au voisinage de N_{x_*} .

Un théorème de Carathéodory permet de compléter F_1, \dots, F_d en un système de coordonnées locales symplectiques. Comme $\{F_i, F_j\} = 0$ et les $D_{x_*} F_i$ sont linéairement indépendantes, il existe V voisinage de x_* dans M et des fonctions $T_1, \dots, T_d, P_1, \dots, P_{n-d}, Q_1, \dots, Q_{n-d}$ telles que

$$\begin{aligned} - \omega|_V &= \sum_{i=1}^d dF_i \wedge dT_i + \sum_{s=1}^{n-d} dP_s \wedge dQ_s \\ - (F, P, Q, T) : V &\longrightarrow \mathcal{W} \times \mathcal{T} \\ v &\longmapsto ((F(v), P(v), Q(v)), T(v)) \end{aligned} \quad \text{soit un difféomorphisme, où } \mathcal{W} \text{ et } \mathcal{T} \text{ sont des ouverts de } \mathbb{R}^{2n-d} \text{ et } \mathbb{R}^d \text{ respectivement.}$$

Soit $\mathcal{C} : \mathcal{W} \times \mathcal{T} \rightarrow V$ son inverse. Grâce à l'écriture de $\omega|_V$ en termes des fonctions F, T, P, Q , on voit que $X_{F_j} = -\frac{\partial}{\partial T_j}$, donc les variétés intégrales dans V de $X_{F_1}, X_{F_2}, \dots, X_{F_d}$ sont des ensembles définis par des coordonnées (T_1, \dots, T_d) et par $(F, P, Q) = cste$;

Cela implique que la sous-variété de V d'équation $\{T = 0\}$ intersecte transversalement les feuilles du feuilletage défini par la distribution (involutive) engendrée par X_{F_1}, \dots, X_{F_d} . Mais par hypothèse, ces feuilles sont les fibres d'une submersion, donc quitte à réduire \mathcal{W} , la sous-variété définie par $\{T = 0\}$ est l'image d'une section locale de cette submersion, qui s'écrit via le difféomorphisme précédent

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{W} &\longrightarrow V \\ b &\longmapsto \mathcal{C}(b, 0). \end{aligned}$$

On va pouvoir étendre ces coordonnées (F, P, Q, T) de V à un voisinage $N_{\mathcal{W}}$ du tore N_{x_*} .

Pour cela, on commence par étendre \mathcal{C} en une application encore notée \mathcal{C} définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow M \\ (b, \tau) &\longmapsto \Phi_\tau(\sigma(b)) \end{aligned} \quad ,$$

où $\Phi_\tau(x) = \phi_{X_{F_1}}^{\tau_1} \circ \dots \circ \phi_{X_{F_d}}^{\tau_d}$ comme dans la preuve d'Arnold-Liouville. Cette nouvelle application \mathcal{C} est un difféomorphisme local symplectique (c'est une conséquence du fait que $\sigma(\mathcal{W})$ est transverse aux sous-variétés intégrales de X_{F_1}, \dots, X_{F_d} et de l'écriture canonique de $\omega|_V$ en termes des fonctions F_i, T_i, P_i, Q_i qui vérifient $\Phi_\tau^* F_i = F_i, \Phi_\tau^* T_i = T_i, \Phi_\tau^* P_i = P_i$ et $\Phi_\tau^* Q_i = Q_i$).

Soit $N_{\mathcal{W}} := \mathcal{C}(\mathcal{W} \times \mathbb{R}^d)$. Comme \mathcal{C} envoie surjectivement les ensembles $\{b = cste\}$ sur les composantes connexes N_x des sous-variétés intégrales de la distribution engendrée par les X_{F_i} qui intersectent $\{T = 0\}$ (cela se traduit par le fait que \mathbb{R}^d agit transitivement sur N_x comme on l'avait déjà vu dans la preuve d'Arnold-Liouville), il vient

$$N_{\mathcal{W}} = \bigcup_{\{x | N_x \cap \{T=0\} = x\}} N_x.$$

Remarquons maintenant que si $x' \in N_x$, $\text{Stab}_{\mathbb{R}^d}(x') = \text{Stab}_{\mathbb{R}^d}(x)$. Cela vient encore du fait que la connexité de N_x implique la transitivité de l'action Φ et du fait que le groupe $(\mathbb{R}^n, +)$ est commutatif. On pourra donc noter $\mathcal{L}(N_x)$ le stabilisateur de chaque point de N_x .

Si $\tau' - \tau \in \mathcal{L}(N_{\sigma(b)})$, il est évident que $\mathcal{C}(b, \tau) = \mathcal{C}(b, \tau')$, si bien que \mathcal{C} induit une application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathbb{T}^d &\longrightarrow M \\ (b, \bar{\tau}) &\longmapsto \Phi_\tau(\sigma(b)). \end{aligned}$$

Cette dernière application est injective car si $\Phi_\tau(\sigma(b)) = \Phi_{\tau'}(\sigma(b'))$, alors $\sigma(b)$ et $\sigma(b')$ sont dans la même orbite pour l'action de \mathbb{R}^n ; or ces orbites sont justement les composantes connexes N_x qui sont les sous-variétés intégrales considérées. Donc nécessairement $\sigma(b') = \sigma(b)$ puisque $\sigma(b)$ et $\sigma(b')$ appartiennent à $\{T = 0\}$ et à la même sous-variété intégrale.

Dans la suite, on notera (F, P, Q, T) les inverses locaux de \mathcal{C} et (f, p, q, τ) les points et les coordonnées sur $\mathcal{W} \times \mathbb{R}^d$.

Observation : Si $x, x' \in N_{\mathcal{W}}$ sont tels que $F(x) = F(x')$, alors $\mathcal{L}(N_x) = \mathcal{L}(N_{x'})$.

Démontrons cela. On remarque d'abord que $X_{F_i} = -\frac{\partial}{\partial T_i}$, $X_{P_s} = -\frac{\partial}{\partial Q_s}$ et $X_{Q_s} = \frac{\partial}{\partial P_s}$. Il s'ensuit que l'application

$$\begin{aligned} \Psi_t : N_{\mathcal{W}} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi_{X_{F_1}}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_{F_d}}^{t_d} \circ \phi_{X_{P_1}}^{t_{d+1}} \circ \dots \circ \phi_{X_{P_{n-d}}}^{t_n} \circ \phi_{X_{Q_1}}^{t_{n+1}} \circ \dots \circ \phi_{X_{Q_{n-d}}}^{t_{2n-d}} \end{aligned}$$

commute avec l'application

$$\begin{aligned} \Phi_\tau : N_{\mathcal{W}} &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi_{X_{F_1}}^{\tau_1} \circ \dots \circ \phi_{X_{F_d}}^{\tau_d}. \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe t tel que $x' = \Psi_t(x)$, alors $\mathcal{L}(N_x) = \mathcal{L}(N_{x'})$.

Or, si x et x' ont pour coordonnées respectives (f, p, q, τ) et (f, p', q', τ') , posant $t = (-\tau'_1 + \tau_1, \dots, -q'_1 + q_1, \dots, p'_1 - p_1, \dots)$, on a $x' = \psi_t(x)$. On a donc obtenu ce que l'on voulait.

Par conséquent, $\mathcal{L}(N_x)$ et la matrice des périodes¹¹ correspondante $L(N_x)$ pourront être notées plutôt $\mathcal{L}(F(x))$ et $L(F(x))$ ou encore $\mathcal{L}(f)$ et $L(f)$, pour $f \in \mathcal{W}$.

Le but est maintenant de construire un symplectomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{W} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \hat{B} \times \mathbb{R}^n \\ (f, p, q, \tau) &\longmapsto (a(f), p, q, L(f)\tau), \end{aligned}$$

de sorte que l'on puisse réaliser un changement de coordonnées symplectiques $(f, p, q, \tau) \mapsto (a, p, q, \hat{\alpha})$ avec $\hat{\alpha} = L(f)\tau$ et pour lequel a ne dépend que de f .

La condition pour laquelle \mathcal{S} est symplectique est donnée par

$$\sum_i da_i \wedge d\hat{\alpha}_i = \sum_i df_i \wedge d\tau_i. \quad (\star)$$

Comme $\tau_i = \sum_j L_{ij}(f)\hat{\alpha}_j$ et comme a et la matrice des périodes L ne dépendent que de f , on a immédiatement

$$\begin{cases} da_i \wedge d\hat{\alpha}_i = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial f_j} df_j \wedge d\hat{\alpha}_i \\ df_i \wedge d\tau_i = df_i \wedge \left(\sum_{j,l} \frac{\partial L_{ij}(f)}{\partial f_l} \hat{\alpha}_j df_l + \sum_j L_{ij}(f) d\hat{\alpha}_j \right). \end{cases}$$

La condition (\star) se réécrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial a_i}{\partial f_j} = L_{ji}(f) & \forall i, j = 1, \dots, d \\ \frac{\partial L_{ij}(f)}{\partial f_l} = \frac{\partial L_{lj}(f)}{\partial f_i} & \forall i, j, l = 1, \dots, d \end{cases}$$

La deuxième ligne constitue en quelque sorte une condition nécessaire pour que la première soit intégrée en une application $a = a(f)$ définie sur un certain sous-ensemble de $F(N_{\mathcal{W}})$.

On va montrer que cette deuxième condition est assurée.

En effet, $\mathcal{C}^{-1}(\sigma(\mathcal{W})) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \Sigma_\nu(\mathcal{W})$, où

$$\begin{aligned} \Sigma_\nu : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{W} \times \mathbb{R}^n \\ (f, p, q) &\longmapsto (f, p, q, L(f)\nu) \end{aligned}$$

Comme \mathcal{C} est symplectique et $\sigma(\mathcal{W})$ est co-isotrope, on a l'existence de $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\Sigma_\nu(\mathcal{W})$ est co-isotrope. Autrement dit, il existe $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\forall (b, \tau) \in \Sigma_\nu(\mathcal{W}), (T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu(\mathcal{W}))^\perp \subset T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu(\mathcal{W})$.

Comme une base de $T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu(\mathcal{W})$ est donnée par

$$\begin{aligned} W_i &:= \frac{\partial}{\partial f_i} + \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial L_{jl}}{\partial f_i} \nu_l \frac{\partial}{\partial \tau_i} \\ Y_s &:= \frac{\partial}{\partial p_s} \\ Z_s &:= \frac{\partial}{\partial q_s}, \end{aligned}$$

11. La matrice des périodes d'un réseau Z de \mathbb{R}^n est par définition la matrice d'une base du réseau Z dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

où $i = 1, \dots, d$ et $s = 1, \dots, n - d$, écrivant de manière générale

$$V = \sum_i \left(V_{f_i} \frac{\partial}{\partial f_i} + V_{\tau_i} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \right) + \sum_s \left(V_{p_s} \frac{\partial}{\partial p_s} + V_{q_s} \frac{\partial}{\partial q_s} \right),$$

et utilisant que $\omega = \sum_{i=1}^d dF_i \wedge dT_i + \sum_{s=1}^{n-d} dP_s \wedge dQ_s$, il vient

$$\begin{aligned} \omega(V, W_i) &= \sum_{j,l} V_{f_j} \frac{\partial P_{jl}}{\partial f_i} \nu_l - V_{\tau_i} \\ \omega(V, Y_s) &= -V_{q_s} \\ \omega(V, Z_s) &= V_{p_s}. \end{aligned}$$

Donc $V \in (T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu(\mathcal{W}))^{\perp\omega(b,\tau)} \iff V = \sum_{i=1}^d V_{f_i} W_i$. Ainsi les (W_i) constituent une base de $(T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu(\mathcal{W}))^{\perp\omega(b,\tau)}$.

Finalement, $(T_{(b,\tau)}\Sigma_\nu)^{\perp\omega(b,\tau)}$ est isotrope si et seulement si $\forall i, j, \omega(W_i, W_j) = 0$. D'où l'existence du difféomorphisme \mathcal{S} voulu après avoir vu que

$$\begin{aligned} \omega(W_i, W_j) &= \sum_l ((W_i)_{f_l} (W_j)_{\tau_l} - (W_j)_{f_l} (W_i)_{\tau_l}) \\ &= \sum_k \nu_k \left(\frac{\partial L_{ik}}{\partial f_j} - \frac{\partial L_{jk}}{\partial f_i} \right). \end{aligned}$$

Enfin, on définit la relation d'équivalence suivante sur $\hat{B} \times \mathbb{R}^n$:

$$(\hat{a}, p, q, \hat{\alpha}) \sim (\hat{a}', p', q', \hat{\alpha}') \stackrel{\text{d'éf}}{\iff} \begin{cases} (\hat{a}, p, q) = (\hat{a}', p', q') \\ \hat{\alpha}' - \hat{\alpha} \in L(a^{-1}(\hat{a})) (\text{Stab}_{\mathbb{R}^n}(\sigma(a^{-1}(\hat{a}), p, q))) \end{cases}$$

La composée $\mathcal{C} \circ \mathcal{S}^{-1} : \hat{B} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow N_{\mathcal{W}}$ induit alors par passage au quotient un symplectomorphisme $\hat{B} \times \mathbb{T}^n \longrightarrow N_{\mathcal{W}}$ qui vérifie les propriétés voulues. \blacksquare

3 Symétries d'un système hamiltonien et problème de Kepler.

3.1 Symétries d'un système hamiltonien.

Définition On appelle symétrie d'un système hamiltonien (M, ω, H) tout symplectomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ tel que $\phi^* X_H = X_H$.

Définition On appelle symétrie infinitésimale d'un système hamiltonien (M, ω, H) tout champ de vecteurs X sur M tel que $L_X \omega = 0$ et $[X, X_H] = 0$.

Proposition 27 Soit (M, ω, H) un système hamiltonien. Si f est un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui est invariant sous le flot de X_H , alors le champ hamiltonien X_f associé à f est une symétrie infinitésimale de (M, ω, H) .

Démonstration

D'abord, la formule de Cartan et le fait que ω est fermée montrent que pour tout champ de vecteurs X sur M , on a $L_X \omega = di_X \omega$. Comme X_f est hamiltonien, on a par définition $i_{X_f} \omega = -df$, d'où $L_{X_f} \omega = 0$.

Ensuite, $[X_f, X_H] = -\frac{d}{dt}|_{t=0} (\phi_{X_H}^t)^* X_f$. La proposition sera ainsi démontrée si l'on prouve que $(\phi_{X_H}^t)^* X_f = X_f$. Or, cela découle du calcul formel suivant et de la définition de X_H : pour tout $p \in M$, pour tout $u \in T_p M$, on a

$$\begin{aligned} \omega_p \left((\phi_{X_H}^t)^* X_f(p), u \right) &= \omega_p \left((D_p \phi_{X_H}^t)^{-1} (X_f(\phi_{X_H}^t(p))), u \right) \\ &= \left((\phi_{X_H}^{-t})^* \omega \right)_{\phi_{X_H}^t(p)} \left(X_f(\phi_{X_H}^t(p)), D_p \phi_{X_H}^t(u) \right) \\ &= \omega_{\phi_{X_H}^t(p)} \left(X_f(\phi_{X_H}^t(p)), D_p \phi_{X_H}^t(u) \right) && \text{(d'après la proposition 9)} \\ &= -D_{\phi_{X_H}^t(p)} f \left(D_p \phi_{X_H}^t(u) \right) \\ &= -D_p (f \circ \phi_{X_H}^t)(u) \\ &= -D_p f(u), \end{aligned}$$

le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne étant justifié par le fait que f est $\phi_{X_H}^t$ -invariante. ■

Une autre propriété importante parfois présentée comme le théorème de Noether et dont la démonstration est analogue à la celle de la proposition précédente s'énonce comme suit.

Proposition 28 Soit (M, ω, H) un système hamiltonien. Si G est un groupe de Lie constitué de symplectomorphismes de M sur M qui agit de façon hamiltonienne en préservant l'hamiltonien H , alors G est un groupe de symétries du système hamiltonien.

Remarque

On parle de symétries évidentes pour qualifier les éléments d'un groupe de Lie G comme dans la proposition précédente. □

Définition On appelle symétrie hamiltonienne d'un système hamiltonien (M, ω, H) tout champ de vecteurs X sur M globalement hamiltonien et qui est une symétrie infinitésimale de ce système.

Remarque

Au vu de la proposition 27, dès que f est un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui est invariant sous le flot de X_H , le champ hamiltonien X_f associé à f est une symétrie hamiltonienne de (M, ω, H) . □

Voici l'intérêt principal de cette notion.

Proposition 29 Soient (M, ω, H) et $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ deux systèmes hamiltoniens dont les variétés symplectiques sous-jacentes sont symplectomorphes. Soit $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ un symplectomorphisme. On suppose que $\phi^* X_{\tilde{H}} = f X_H$ pour une certaine fonction f sur M qui garde un signe constant non-nul. Soit Z un champ de vecteurs sur M . Si $\phi_* Z$ est une symétrie hamiltonienne de $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ associée à un hamiltonien \tilde{g} , alors Z est un champ de vecteurs hamiltonien sur M (associé à $\tilde{g} \circ \phi$) et on a l'équivalence

$$Z \text{ est une symétrie infinitésimale de } (M, \omega, H) \iff \forall m \in M, [X_{\tilde{g} \circ \phi}, X_f](m) = 0 \text{ ou } D_m H = 0.$$

Démonstration

On suppose que $\phi_* Z$ est une symétrie hamiltonienne de $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$.

D'abord, comme $\phi_* Z$ est hamiltonien, il existe $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M})$ tel que $i_{\phi_* Z} \tilde{\omega} = -d\tilde{g}$. Puisque ϕ est symplectique, on montre aisément que $i_Z \omega = -d(\tilde{g} \circ \phi)$; cela montre que Z est hamiltonien.

Comme on l'a fait remarquer plus haut, le fait que Z soit hamiltonien implique automatiquement que $L_Z\omega = 0$. On pourrait également mener un calcul utilisant les définitions des tirés-en-arrière et poussés-en-avant pour montrer que $i_Z(\phi^*\tilde{\omega}) = \phi^*(i_{\phi_*Z}\tilde{\omega})$, de sorte qu'on aurait aussi

$$\begin{aligned} L_Z\omega &= d \circ i_Z(\phi^*\tilde{\omega}) \\ &= d \circ \phi^*(i_{\phi_*Z}\tilde{\omega}) \\ &= \phi^*(d \circ i_{\phi_*Z}\tilde{\omega}) \\ &= \phi^*L_{\phi_*Z}\tilde{\omega} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, il reste à montrer que $[Z, X_H] = 0$ si et seulement si $[Z, X_f] = 0$ ou $D_m H = 0$. Comme $[\phi_*Z, X_{\tilde{H}}] = 0$ et $\phi^*X_{\tilde{H}} = fX_H$ par hypothèse, on a immédiatement $[Z, fX_H] = 0$, c'est-à-dire

$$f[Z, X_H] + (Z \cdot f)X_H = 0.$$

Ainsi, $[Z, X_H] = 0$ si et seulement si $(Z \cdot f)X_H = 0$ si et seulement si pour tout $m \in M$, $\{f, \tilde{g} \circ \phi\}(m) = 0$ ou $X_H(m) = 0$. Cela fournit exactement l'équivalence énoncée dans la proposition. ■

Remarque

En particulier, reprenant les éléments qui précèdent, si f est la fonction constante égale à 1, alors ϕ_*Z est une symétrie hamiltonienne de $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ si et seulement si Z est une symétrie hamiltonienne de (M, ω, H) . □

Définition Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de dimension d , on dit qu'un système hamiltonien (M, ω, H) possède une \mathfrak{g} -symétrie s'il existe d symétries hamiltoniennes de ce système qui engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$.

Remarque

On introduit dans la seconde sous-partie de ce troisième volet d'autres notions de symétries, en lien plus étroit avec le vocabulaire des régularisations. □

3.2 Problème de Kepler ; symétries évidentes et nécessité de régularisation.

3.2.1 Présentation du problème de Kepler

Lorsque l'espace de configuration est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on considère son fibré cotangent que l'on identifie à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$ et que l'on appelle espace des phases.

On prendra toujours $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ comme coordonnées sur ce fibré cotangent. On écrira souvent (q, p) au lieu de $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ pour désigner un élément générique de l'espace des phases.

La 1-forme de Liouville α associée admet donc l'expression

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

valide sur tout l'espace des phases.

On peut ainsi considérer pour tout hamiltonien H défini sur l'espace des phases le système hamiltonien $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n, d\alpha, H)$.

Lorsqu'en plus H s'exprime (à des constantes multiplicatives près) sous la forme

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \frac{1}{\|q\|},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , le système hamiltonien associé est nommé problème de Kepler de dimension n .

Les équations de Hamilton associées qui décrivent physiquement le mouvement d'une particule dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soumise au potentiel $r \mapsto -\frac{1}{r}$ ($r = \|q\|$ désigne la distance de la particule à l'origine) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = p_i \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{q_i}{\|q\|^3}. \end{cases}$$

Autrement dit, le flot de X_H permet de décrire complètement les solutions $t \mapsto q(t)$ de l'équation du mouvement d'une particule dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soumise au potentiel $r \mapsto -\frac{1}{r}$.

3.2.2 Symétries évidentes du problème de Kepler.

Dans ce paragraphe, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . L'action naturelle du groupe de Lie $SO(n)$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ induit une action de $SO(n)$ sur le fibré cotangent $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ qui est symplectique (d'après la proposition 5). L'identification du fibré cotangent avec le fibré tangent de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ via le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n permet de réécrire l'action précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned} SO(n) \times T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ (A, (q, p)) &\longmapsto (Aq, Ap). \end{aligned}$$

Cette action de $SO(n)$ est hamiltonienne d'application moment

$$\begin{aligned} \mu_n : T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathfrak{so}(n)^* \\ (q, p) &\longmapsto (\xi \mapsto \langle \xi q, p \rangle). \end{aligned}$$

En plus, le hamiltonien H du problème de Kepler de dimension n est invariant sous l'action de $SO(n)$. De cela, il résulte que les champs de vecteurs hamiltoniens associés aux composantes de l'application moment μ_n (ces composantes ne sont rien d'autre que les coefficients de l'expression de μ_n comme combinaison linéaire des vecteurs $e_{i,j}^* := \mu_n(e_i, e_j)$ formant une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n+1)^*$) forment $\frac{n(n-1)}{2}$ symétries infinitésimales du problème de Kepler de dimension n . Ces composantes sont les applications

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} : T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\longmapsto q_i p_j - q_j p_i. \end{aligned}$$

De cette étude et de la proposition 28, il résulte que le problème de Kepler de dimension n présente une $\mathfrak{so}(n)$ -symétrie et que les éléments du groupe de Lie $SO(n)$ sont des symétries évidentes du problème de Kepler de dimension n .

3.2.3 Nécessité d'une régularisation des orbites de collision.

Définition On appelle *orbite de collision* du problème de Kepler toute courbe intégrale $t \mapsto \phi_{X_H}^t(p)$ du champ de vecteurs X_H qui n'est pas définie sur tout \mathbb{R} .

Tout l'intérêt de ce mémoire prend sa source dans la proposition qui suit.

Proposition 30 Le champ hamiltonien de Kepler X_H n'est pas complet. Autrement dit, il existe des orbites de collision pour le problème de Kepler.

Démonstration

L'idée est de voir qu'il existe des solutions intégrales du système associé à X_H qui quittent les compacts en temps fini. Par exemple, considérons la solution intégrale $c : t \mapsto (q(t), p(t)) = (r(t), \dot{r}(t))$ d'énergie fixée $H < 0$ telle que $c(0) = (-\frac{1}{H}, 0)$ et telle que $r(t)$ et $\dot{r}(t)$ sont colinéaires pour tout t (ce qui correspond à un moment angulaire $q(t) \wedge p(t)$ nul).

Puisque pour tout t appartenant au domaine de définition de c , on a $\frac{1}{2}\dot{r}(t)^2 - \frac{1}{r(t)} = H$, le temps mis pour atteindre l'origine

vaut $\int_0^{-\frac{1}{H}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} + 2H}}$ qui est bien une intégrale convergente. ■

La proposition précédente motive la définition suivante.

Définition On appelle *complétion* d'un système hamiltonien (M, ω, H) la donnée d'un système hamiltonien (N, Ω, \tilde{H}) tel que le flot de $X_{\tilde{H}}$ sur N est complet et d'un plongement $\phi : M \rightarrow N$ symplectique tel que $\phi^* \tilde{H} = H$.

Remarque

Parfois, on parvient à construire une application ϕ comme dans la définition précédente, à ceci près que l'on n'ait pas $\phi^* \tilde{H} = H$ mais simplement l'équivalence¹² entre les champs de vecteurs X_H et $X_{\tilde{H}}$ au moyen de cette application ; dans ce cas, on ne parlera bien sûr pas de complétion mais on adoptera plutôt la terminologie suivante, d'ailleurs plus largement répandue dans la littérature. □

12. Pour la notion d'équivalence entre champs de vecteurs, on pourra se référer au paragraphe 1.3.

Définition On appelle régularisation d'un système hamiltonien (M, ω, H) la donnée d'un système hamiltonien (N, Ω, \tilde{H}) tel que le flot de $X_{\tilde{H}}$ sur N est complet et d'un plongement $\phi : M \rightarrow N$ symplectique tel que les champs de vecteurs $\phi^* X_{\tilde{H}}$ et X_H sont équivalents.

Souvent les procédés de régularisation que l'on va expliciter dans les volets suivants vont permettre d'exhiber des \mathfrak{g} -symétries cachées du problème de Kepler, c'est-à-dire des \mathfrak{g} -symétries hamiltoniennes (infinitésimales) d'un système hamiltonien qui régularise le système initial. Aussi, au vu de ce qui précède et du paragraphe 3.1, toute \mathfrak{g} -symétrie cachée du problème de Kepler qui est une \mathfrak{g} -symétrie hamiltonienne d'un système hamiltonien qui fournit une complétion du problème de Kepler sera une \mathfrak{g} -symétrie hamiltonienne du problème de Kepler.

4 Géométrie du problème de Kepler et régularisation en petite dimension.

4.1 Le problème de Kepler comme système super-intégrable.

On a vu en toute généralité que le problème de Kepler correspondant à la dimension $n \geq 2$ possède $\frac{n(n-1)}{2}$ symétries infinitésimales données par la $\mathfrak{so}(n)$ -symétrie évidente qui engendrent une algèbre de Lie isomorphe à celle de $\mathfrak{so}(n)$, donc $\frac{n(n-1)}{2}$ intégrales premières dont on connaît les crochets de Poisson. Le théorème de Mischenko et Fomenko et la résolution du système

$$\begin{cases} 2n - d = \frac{n(n-1)}{2} \\ d \geq n \end{cases}$$

montrent que pour $n \geq 3$, le problème de Kepler est intégrable au sens non-commutatif et même dégénéré pour $n \geq 4$.

On considère maintenant le problème de Kepler correspondant à la dimension $n = 2$ dont l'espace des phases est $M := \{(q, p) \in \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2 \mid H(q, p) < 0 \text{ et } q \neq 0\}$.

On a trois intégrales premières du système hamiltonien considéré données par :

- la composante F_3 du moment angulaire $q \times p$ dans la direction orthogonale au plan ;
- les deux composantes dans le plan F_1 et F_2 du vecteur de Runge-Lenz $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{-2H}} \left(q \times (p \times q) - \frac{q}{\|q\|} \right)$.¹³

On pose alors $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application dont les fonctions coordonnées sont les F_i . On vérifie que F est une submersion et que $\|F\|^2 = -\frac{1}{2H}$.

La matrice P qui donne les crochets de Poisson $\{F_i, F_j\}$ et qui apparaît dans les hypothèses du théorème 2.2 est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & -F_3 & F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ -F_2 & F_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang $2 = 2 \times 2 - 2 \times 1$.

Ainsi, les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées et le problème de Kepler de dimension 2 est dégénéré.

De la sorte, les fibres de F sont des cercles S^1 et forment un feuilletage \mathcal{F} de M qui est symplectiquement complet. Comme $\{H, F_i\} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, le feuilletage polaire \mathcal{F}^\perp de M (dont les feuilles sont générées par les flots des champs hamiltoniens X_{F_i} , pour $i = 1, 2, 3$) est donné par les ensembles de niveau $\{H = cste\}$ qui sont des sous-variétés de M de dimension 3. Notons que l'ensemble de niveau $\{H = -k\}$ correspond exactement à l'ensemble $\{\|F\|^2 = \frac{1}{2k}\}$. Par ailleurs, le hamiltonien H est une intégrale première de \mathcal{F}^\perp .

On a donc aussi le fait que X_H engendre la distribution intégrable associée à \mathcal{F} ou encore que le feuilletage \mathcal{F} est généré par le flot de X_H .

Or, le flot de X_H génère également les orbites de Kepler. Ainsi, les orbites de Kepler correspondent aux fibres de F .

On verra plus loin que les régularisations du problème de Kepler de dimension $n \geq 2$ fournissent n symétries infinitésimales supplémentaires à la $\mathfrak{so}(n)$ -symétrie hamiltonienne évidente ; notamment, cela permet de montrer comme pour le cas $n = 2$ que le problème de Kepler de dimension 3 est lui aussi dégénéré. De la sorte, le problème de Kepler est dégénéré en toute dimension $n \geq 2$.

4.2 Régularisation en petite dimension de Levi-Civita avec une approche géométrique.

Dans cette partie, on étudie la topologie du problème de Kepler de dimension 2 pour les orbites d'énergie négative fixée ; l'espace des phases sera noté $\Sigma_c := \{(q, p) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \mid H(q, p) = -c^2\}$, pour une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ que l'on supposera fixée une fois pour toutes dans la suite. En outre, on présente d'un point de vue assez géométrique une compactification de ce système hamiltonien.

On décrit d'abord la topologie de l'espace des phases.

¹³. On retrouvera plus loin de façon naturelle l'expression des composantes de ce vecteur bien connu des physiciens lorsqu'on procèdera à des régularisations du problème de Kepler.

4.2.1 Topologie de l'espace des phases.

On observe que Σ_c s'écrit aussi

$$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \{p\} \mid |q| = \frac{1}{\frac{|p|^2}{2} + c^2}\},$$

ce qui montre que la projection selon la seconde composante $\Sigma_c \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un fibré en S^1 sur la base \mathbb{R}^2 qui est contractile, donc via un théorème d'Ehresmann, Σ_c correspond topologiquement au produit $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Notons qu'il est possible de donner un difféomorphisme explicite entre Σ_c et le tore plein privé de son bord $S^1 \times D^2$ (où D^2 désigne le disque unité ouvert dans \mathbb{R}^2). Il suffit en effet de prendre l'application

$$\begin{aligned} \Sigma_c &\longrightarrow S^1 \times D^2 \\ (q, p) &\longmapsto \left(\frac{q}{\|q\|}, \frac{1}{\sqrt{2}} \|q\|^{\frac{1}{2}} p \right). \end{aligned}$$

4.2.2 Plongement de l'espace des phases dans $\mathbb{R}P^3$.

On va montrer en quoi la sous-variété Σ_c est reliée à $\mathbb{R}P^3$.

En identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} de manière standard, on voit maintenant $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{C}$.

Pour la suite, on fixe une fois pour toutes une sous-variété Σ_c .

L'application de Levi-Civita

$$\begin{aligned} \Pi_C : \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto (q, p) := \left(2z^2, \frac{cw}{\bar{z}} \right), \end{aligned}$$

qui est symplectique à facteur multiplicatif constant près égal à $2c$, induit un revêtement à deux feuillets

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_c &\longrightarrow \Sigma_c \\ (z, w) &\longmapsto (q, p) := \left(2z^2, \frac{cw}{\bar{z}} \right), \end{aligned}$$

où $\tilde{\Sigma}_c := \{|w|^2 + |z|^2 = \frac{1}{2c^2}\} \setminus \{z = 0\}$.

On peut voir que $\tilde{\Sigma}_c$ correspond topologiquement à $S^3 \setminus S^1$ ou encore à

$$\bigcup_{\{|w| < \frac{1}{2c^2}\}} \{(z, w) \mid |z|^2 = \frac{1}{2c^2} - |w|^2\},$$

donc topologiquement à $S^1 \times \mathbb{D}^2$, soit encore à $S^1 \times \mathbb{R}^2$ via le théorème d'Ehresmann. Le système différentiel associé au champ hamiltonien de Kepler X_H est le système

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{q}{\|q\|^3}. \end{cases}$$

sur Σ_c a pour image réciproque par π_c sur $\tilde{\Sigma}_c$ le champ (que l'on notera X) défini par le système différentiel linéaire

$$(S) := \begin{cases} \frac{dz}{ds} = w \\ \frac{dw}{ds} = -z \end{cases},$$

où s et t sont des variables temporelles reliées par

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{\|q\|}.^{14}$$

Il suffit effectivement d'écrire

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dz} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} \\ \frac{dp}{dt} = \frac{c}{\bar{z}} \frac{dw}{dt} - \frac{cw}{\bar{z}^2} \frac{d\bar{z}}{dt}. \end{cases}$$

14. Cela constitue le changement de paramètre de Levi-Civita.

Autrement dit, $\Pi_c^* X_H(z, w) = \frac{c}{\|z\|^2} X(z, w)$, ce qui veut dire que les flots de X_H et de X sont équivalents au sens du paragraphe 1.3; cela s'écrit

$$\Pi_C(\phi_X^{s(t)}(z, w)) = \phi_{X_H}^t(\Pi_C(z, w)).$$

Notons que si l'on effectue le changement de variables (symplectique à constante multiplicative près) défini par

$$\zeta : \begin{cases} \{|w|^2 + |z|^2 = \frac{1}{2c^2}\} \cong S^3 \\ (z, w) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \{|u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\} \cong S^3 \\ (u_1, u_2) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} u_1 = w + iz \\ u_2 = \bar{w} + i\bar{z}, \end{cases}$$

le système (S) devient :

$$(S') := \begin{cases} \frac{du_1}{ds} = iu_1 \\ \frac{du_2}{ds} = iu_2. \end{cases}$$

Cela définit un nouveau champ de vecteurs X' sur $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\}$ tel que

$$\phi_X^s(\zeta^{-1}(u_1, u_2)) = \zeta^{-1}(\phi_{X'}^s(u_1, u_2)).$$

Le système (S') se résout en

$$\begin{cases} u_1(s) = C_1 e^{is} \\ u_2(s) = C_2 e^{is}, \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des complexes qui doivent vérifier $|C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{c^2}$. Chaque couple $(u_1(s), u_2(s)) = (C_1 e^{is}, C_2 e^{is})$ appartient donc à

$$\begin{aligned} \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\} \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid [u_1; u_2] = [C_1; C_2] \in \mathbb{C}P^1\} &= S^3 \cap \{\text{une droite complexe}\} \\ &= \text{un grand cercle de } S^3. \end{aligned}$$

Cela motive le paragraphe suivant, où l'on décrit notamment la géométrie des courbes intégrales du système (S') .

4.2.3 Lien avec l'application de Hopf et géométrie des trajectoires de Kepler.

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto [u_1; u_2] \end{aligned}$$

induit par restriction à S^3 l'application de Hopf

$$\begin{aligned} S^3 \subset \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \simeq S^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto [u_1; u_2] \end{aligned}$$

qui est une fibration lisse localement triviale de fibre type S^1 . Les fibres sont les courbes intégrales du système (S') . Essayons de mieux comprendre l'organisation de ces fibres dans S^3 .

Pour cela, on est amené à considérer pour chaque couple $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{c^2}$ la sous-variété de S^3 d'équation $\{|u_1|^2 = C_1\}$ et $\{|u_2|^2 = C_2\}$ qui est laissée invariante par le flot du champ de vecteurs défini par le système (S') .

En général, si $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$, cette sous-variété est un tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Si par contre $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$, la sous-variété est "dégénérée" en un cercle S^1 .

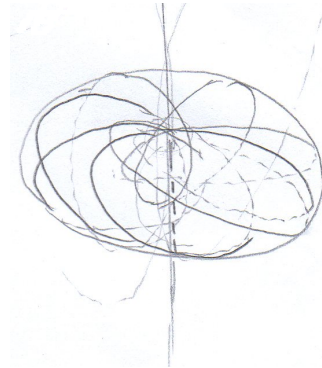
Il s'agit de noter que la courbe intégrale correspondant à

$$\begin{cases} u_1(s) = C_1 e^{is} \\ u_2(s) = C_2 e^{is} \end{cases}$$

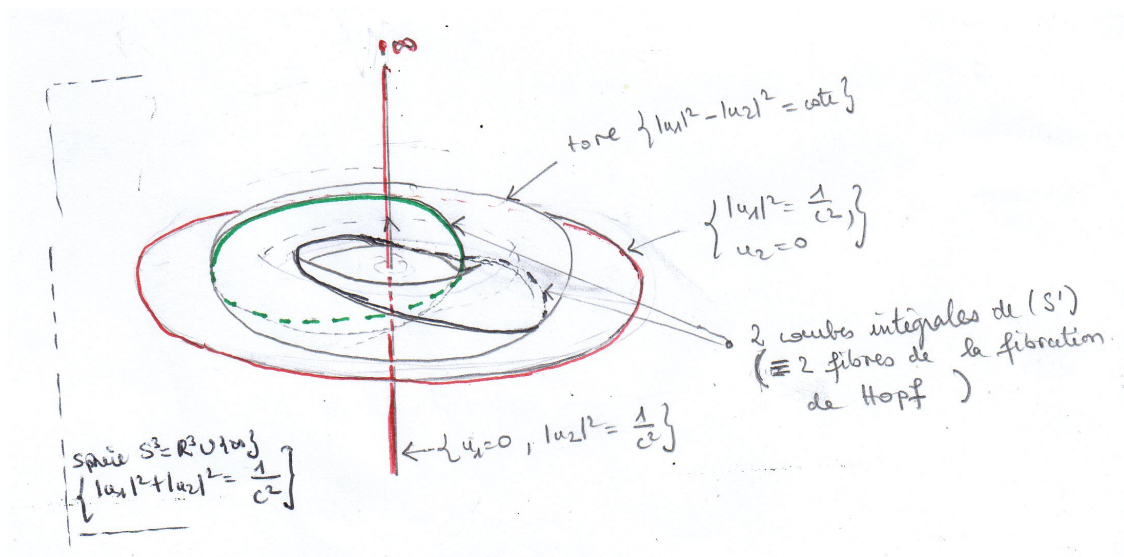
est un grand cercle S^1 sur le tore d'équations

$$\begin{cases} |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2} \\ |u_1|^2 - |u_2|^2 = C_1^2 - C_2^2. \end{cases}$$

Le schéma suivant permet de visualiser la fibration de Hopf projetée stéréographiquement dans \mathbb{R}^3 d'un point de vue assez global (il faut imaginer un empilement de tores concentriques pour chacun desquels on a un agencement des fibres comme sur le dessin); notamment, on voit comment les fibres s'enchevêtrent.



Il est à noter que les fibres sont deux à deux enlacées. Cela se voit le mieux lorsque les deux cercles appartiennent à un même tore.



Passons maintenant à la géométrie et à la topologie des trajectoires de Kepler.

La projection selon la première composante de l'image par le changement de variables $(u_1, u_2) \mapsto (z, w)$ suivi par l'application π_C de Levi-Civita de la courbe intégrale $s \mapsto (u_1(s), u_2(s))$ de (S') qui s'écrit

$$\begin{cases} u_1(s) = r_1 e^{\theta_1 + s} \\ u_2(s) = r_2 e^{\theta_2 + s}, \end{cases}$$

avec $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{c^2}$ correspond exactement à l'ellipse d'équation :

$$q = -\frac{1}{2} e^{i\phi} [(r_1^2 + r_2^2) \cos \chi - 2r_1 r_2 + i(r_1^2 - r_2^2) \sin \chi],$$

où $\phi = \theta_1 - \theta_2 = \arg u_1 - \arg u_2 [2\pi]$ et $\chi = \theta_1 + \theta_2 + 2s = \arg u_1 + \arg u_2 [2\pi]$.

Le grand axe de cette ellipse est incliné de l'angle ϕ par rapport à l'axe des abscisses et a pour longueur $2a = r_1^2 + r_2^2$; le petit axe est de longueur $2b = |r_2^2 - r_1^2|$. L'excentricité de cette ellipse vaut $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 2c^2 r_1 r_2$.

Notons que les trajectoires circulaires correspondent à $a = b$, c'est-à-dire à $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$, soit encore $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$.

Les orbites de collision correspondent aux courbes intégrales dans $\tilde{\Sigma}_c$ qui vérifient $z = 0$, autrement dit aux courbes intégrales qui remplissent le tore d'équations

$$\begin{cases} |u_1| = |u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}c} \\ |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

Les courbes intégrales remplissant le tore d'équations

$$\begin{cases} |u_1| = r_1 \\ |u_2| = r_2 \end{cases}$$

avec $r_1, r_2 \neq 0$ et $r_1 \neq r_2$ correspondent à des ellipses qui diffèrent par l'angle ϕ .

Remarquons que les points opposés (u_1, u_2) et $(-u_1, -u_2)$ qui appartiennent à la même courbe intégrale du flot de (S') ont même image par π_c . Chaque ellipse keplerienne est ainsi revêtue deux fois par la courbe intégrale de (S') qui lui correspond. En particulier, le tore d'équations

$$\begin{cases} |u_1| = r_1 \\ |u_2| = r_2 \end{cases}$$

avec $r_1, r_2 \neq 0$ et $r_1 \neq r_2$ a pour image par π_c un tore de Σ_c qu'il revêt deux fois.

Il est intéressant d'observer à présent la trace des courbes intégrales de (S') sur le sous-ensemble de \mathbb{C}^2 défini par

$$A := \{(u_1, u_2) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \mid |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}, \chi \equiv 0 [2\pi]\},$$

difféomorphe à $S^1 \times]-\frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^2}[$ (A est donc un anneau, appelé anneau de section); un tel difféomorphisme est donné par exemple par :

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow S^1 \times]-\frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^2}[\\ (u_1, u_2) &\longmapsto (\arg u_1 [2\pi], |u_1|^2 - |u_2|^2). \end{aligned}$$

Proposition 31 *Chaque courbe intégrale non-circulaire de (S') rencontre transversalement A en deux points diamétralement opposés de $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\}$ identifié à S^3 .*

Démonstration

Pour C_1, C_2 complexes tels que $|C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{c^2}$, il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2} \\ \arg u_1 + \arg u_2 \equiv 0 [2\pi] \\ \frac{u_1}{u_2} = \frac{C_1}{C_2}, \end{cases}$$

ce qui fournit $\arg u_1 = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{C_1}{C_2}\right) [\pi]$ ■

Le quotient \mathcal{A} de A modulo la relation d'antipodie est encore difféomorphe à $S^1 \times]-\frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^2}[$ et rencontre en un seul point chaque courbe intégrale non-circulaire du flot quotient de celui donné par (S') sur $\mathbb{R}P^3$ qui est le quotient de S^3 par la relation d'antipodie.

L'objet du paragraphe qui suit est de montrer que le flot quotient du champ X' définissant (S') par la relation d'antipodie est équivalent à un flot bien connu : le flot géodésique de S^2 sur la variété $T_1^* S^2$ (ou encore, comme on va le voir, à $SO(3)$ ou $\mathbb{R}P^3$) pour la métrique ronde standard sur S^2 .

Cela aboutira naturellement à une régularisation du problème de Kepler (restreint à une orbite d'énergie négative fixée) de dimension 2.

4.2.4 Etablissement d'une équivalence entre le problème de Kepler considéré et le système hamiltonien géodésique sur $T_1^*S^2$.

On commence par deux propositions qui vont permettre de préciser le flot géodésique de la variété riemannienne euclidienne S^2 et de construire un difféomorphisme $\mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$ qui va permettre d'entrelacer (à reparamétrisation près de la variable temporelle) le flot quotient de celui de X' par l'antipodie et le flot géodésique sur $SO(3)$.

Proposition 32 – *Le fibré tangent unitaire T_1S^2 sur S^2 (lui-même isomorphe au fibré cotangent unitaire $T_1^*S^2$) est difféomorphe au groupe des rotations $SO(3)$ de \mathbb{R}^3 . En particulier, $SO(3)$ est muni d'une structure symplectique qui fait du difféomorphisme précédent un symplectomorphisme.*
– *Le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est difféomorphe à S^3 . Cela permet aussi de transporter via ce difféomorphisme la structure symplectique de $\{|u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\}$ à $SU(2)$.*

Démonstration

– On voit ici S^2 comme la sphère unité dans \mathbb{R}^3 .

Pour $(x, y) \in T_1S^2$, on considère le produit vectoriel $x \times y$. Alors $\mathcal{B}_{(x,y)} := (x, y, x \times y)$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 si bien que, si l'on note \mathcal{B} la base canonique dans \mathbb{R}^3 , la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{(x,y)}}$ est un élément de $SO(3)$. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} T_1S^2 &\longrightarrow SO(3) \\ (x, y) &\longmapsto P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{(x,y)}} \end{aligned}$$

qui est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ . On vérifie sans peine qu'elle est bijective et que son inverse (que l'on sait expliciter) est aussi de classe \mathcal{C}^∞ .

– Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Corollaire 7 *Le flot géodésique $\phi_{X_G}^t$ de S^2 prend donc ses valeurs dans $SO(3)$. De plus, on a :*

$$\phi_{X_G}^t(Id) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si bien que pour tout élément $g \in SO(3)$, on a aussi

$$\phi_{X_G}^t(g) = g \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration

Pour la deuxième assertion, il s'agit de remarquer que $Id \in SO(3)$ correspond à $((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \in T_1S^2$ via le difféomorphisme entre T_1S^2 et $SO(3)$ et que la géodésique de S^2 qui passe par $(1, 0, 0)$ au temps $t = 0$, qui a pour vecteur tangent initial $(0, 1, 0)$ et dont le paramétrage se fait à vitesse 1 passe par le point $(\cos t, \sin t, 0)$ au temps t .

Ensuite, l'élément $((\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0)) \in T_1S^2$ correspond à la rotation d'angle t et d'axe (Oz) via le difféomorphisme précédent.

Pour en déduire la dernière partie, on remarque que le flot géodésique commute avec les relevés aux espaces tangents des isométries de S^2 ; ainsi, avec l'identification de T_1S^2 et $SO(3)$ donnée plus haut, pour tous $g, g_0 \in SO(3)$, on a $\phi_{X_G}^t(gg_0) = g\phi_{X_G}^t(g_0)$. Il reste maintenant à prendre $g_0 = Id$ dans la dernière égalité. ■

Proposition 33 *$SU(2)$ est un revêtement à deux feuilletés de $SO(3)$.*

Démonstration

Il est tout à fait possible de considérer l'action adjointe du groupe de Lie $SU(2)$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ qui est à valeurs dans le groupe orthogonal de $\mathfrak{su}(2)$ pour la forme quadratique Det induite par le déterminant et de noter que l'espace $(\mathfrak{su}(2), \text{Det})$ est isométrique à l'espace euclidien standard de dimension 3. Cela permet sans grand effort supplémentaire d'obtenir la proposition.

On propose ici une autre preuve qui donne une construction explicite d'un tel revêtement.

On commence par considérer l'action naturelle de $SU(2)$ sur \mathbb{C}^2 qui induit une action ϕ de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}P^1$.

On note S la projection stéréographique de $S^2 \setminus \{N\}$ sur \mathbb{R}^2 qui induit un difféomorphisme (encore noté S) entre S^2 et $\mathbb{C}P^1$.

Pour $g \in SU(2)$, on définit la composition $\Phi_g := S^{-1} \circ \phi_g \circ S$. Notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , on définit l'application

$$\begin{aligned} \Psi : SU(2) &\longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \\ g &\longmapsto \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(\Phi_g(e_1), \Phi_g(e_2), \Phi_g(e_3)). \end{aligned}$$

Si l'on prend la matrice $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ comme élément générique de $SU(2)$, on peut expliciter l'application Ψ ; en effet, il vient

$$\Psi_g = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(\alpha^2 - \beta^2) & \mathcal{I}(\alpha^2 - \beta^2) & 2\mathcal{R}(\alpha\bar{\beta}) \\ \mathcal{I}(\alpha^2 + \beta^2) & -\mathcal{R}(\alpha^2 + \beta^2) & 2\mathcal{I}(\alpha^2\bar{\beta}) \\ -2\mathcal{R}(\alpha\beta) & -2\mathcal{I}(\alpha\beta) & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{bmatrix}.$$

Comme Φ_g est à valeurs dans S^2 et que $\langle \Phi_g(e_i), \Phi_g(e_j) \rangle = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq 3$, on observe que pour tout g , l'endomorphisme $\Psi(g)$ est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^3 . Comme Ψ est continue et $SU(2)$ est connexe, Ψ est bien à valeurs dans $SO(3)$. L'application Ψ est surjective. En effet, $SO(3)$ est engendré par exemple par les rotations d'angles ϕ autour de l'axe (Oz) dirigé par e_3 et d'angles θ autour de l'axe (Ox) dirigé par e_1 . Or ces deux matrices sont les images respectives par Ψ des matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ qui sont des éléments de } SU(2).$$

Ensuite, Ψ est un morphisme de groupes de Lie $SU(2) \rightarrow SO(3)$ dont la différentielle en l'identité I_2 est un isomorphisme et on vérifie que le noyau de Ψ est $\{\pm I_2\}$. Cela achève la démonstration. \blacksquare

Remarque

On vérifie d'abord que le revêtement construit précédemment est un symplectomorphisme local relativement aux structures symplectiques de $SU(2)$ et $SO(3)$ explicitées dans la proposition 32.

On obtient dès lors une application symplectique

$$\begin{aligned} \rho : \{ |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2} \} \simeq S^3 &\longrightarrow SU(2) \longrightarrow SO(3) \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \begin{pmatrix} cu_1 & cu_2 \\ -\bar{c}u_2 & \bar{c}u_1 \end{pmatrix} \longmapsto \Psi \left(\begin{pmatrix} cu_1 & cu_2 \\ -\bar{c}u_2 & \bar{c}u_1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui descend évidemment en un symplectomorphisme $\bar{\rho} : \mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$. \square

La proposition suivante est le fruit du travail de ce paragraphe.

Proposition 34 *Le flot géodésique de S^2 (défini sur $SO(3)$) et le flot du champ X' définissant (S') sur S^3 sont reliés par la formule suivante :*

$$\phi_{X_G}^t(\rho(\pm(u_1, u_2))) = \rho\left(\phi_{X'}^{\frac{t}{2}}(u_1, u_2)\right).$$

Démonstration

On commence par traiter le cas particulier où $(u_1, u_2) = (1, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} \phi_{X_G}^t(\rho(\pm(1, 0))) &= \phi_{X_G}^t(\text{Id}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \Psi \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \rho(e^{i\frac{t}{2}}, 0) \\ &= \rho\left(\phi_{X'}^{\frac{t}{2}}(1, 0)\right). \end{aligned}$$

Utilisant maintenant que ρ est un morphisme de groupes et que les flots $\phi_{X_G}^t$ et $\phi_{X'}^{t/2}$ commutent respectivement avec les éléments de $SO(3)$ et de S^3 , on en déduit la formule pour tout (u_1, u_2) appartenant à S^3 . \blacksquare

On identifie S^3 à $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{c^2}\}$.

Le difféomorphisme $\zeta : S^3 \rightarrow S^3$ descend en un difféomorphisme $\bar{\zeta} : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ symplectique.

Aussi, le revêtement à deux feuillets induit par l'application de Levi-Civita descend en un symplectomorphisme $\bar{\Pi}_C : \frac{\Sigma_C}{\mathbb{Z}/2} \rightarrow \Sigma_C$.

Corollaire 8 *Le flot obtenu sur $\mathbb{R}P^3$ par quotient du flot du champ X' par la relation d'antipodie sur S^3 est équivalent au flot géodésique de S^2 .*

La sous-variété $E := \{(\overline{u_1}, \overline{u_2}) \in \mathbb{R}P^3 \mid \overline{u_1} \neq \overline{u_2}\}$ de $\mathbb{R}P^3$ est difféomorphe à $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{T}^2$.

Finalement, tout ce qui précède permet d'aboutir au corollaire suivant.

Corollaire 9 *Le champ de vecteurs X_H sur Σ_c est équivalent au champ de vecteurs géodésique X_G sur $SO(3)$. Plus précisément, pour tout $(u_1, u_2) \in E$,*

$$\overline{\Pi}_C \circ \overline{\zeta}^{-1} \circ \overline{\rho}^{-1} \left(\phi_{X_G}^{2s(t)}(\overline{\rho}(\overline{(u_1, u_2)})) \right) = \phi_{X_H}^t \left(\overline{\Pi}_C \circ \overline{\zeta}^{-1}(\overline{(u_1, u_2)}) \right).$$

Ainsi, l'application $\overline{\rho} \circ \overline{\zeta} \circ \overline{\Pi}_C^{-1}$ est un symplectomorphisme $\Sigma_c \rightarrow E \subset \mathbb{R}P^3$ qui fournit une compactification du problème de Kepler de dimension 2 restreint à un niveau d'énergie négative fixée en le système hamiltonien donné par le hamiltonien géodésique sur $\mathbb{R}P^3$.

Enfin, il est bien d'observer ce qu'il advient des orbites de collision lors de la régularisation; cela donne en particulier une vision topologique de la compactification de Σ_c dans $\mathbb{R}P^3$.

4.2.5 Ensemble correspondant aux orbites de collision dans $\mathbb{R}P^3$.

Les orbites de collision correspondent aux courbes dans S^3 qui contiennent un point (u_1, u_2) avec $u_2 = \overline{u_1}$ (puisque cela revient à contenir un point (z, w) où $z = 0$).

On en déduit qu'une courbe intégrale d'équation

$$\begin{cases} u_1(t) = C_1 e^{it} \\ u_2(t) = C_2 e^{it} \end{cases}$$

où $|C_1|^2 + |C_2|^2 = \frac{1}{2}$ correspond à une orbite de collision si et seulement si $|C_1| = |C_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si et seulement si $\forall t, |u_1(t)| = |u_2(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc après régularisation, l'ensemble correspondant aux orbites de collision dans S^3 est égal à l'ensemble des $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|u_1| = |u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, qui est topologiquement un tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Dans $\mathbb{R}P^3$, cet ensemble est encore un tore \mathbb{T}^2 .

Notons qu'avant la régularisation, les orbites de collision engendrent un cylindre ouvert $S^1 \times \mathbb{R}$. Pour le voir, il s'agit en effet d'exclure de $S^1 \times S^1$ l'ensemble des couples $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $u_2 = \overline{u_1}$, ce qui correspond topologiquement à un cercle S^1 .

5 Régularisation du problème de Kepler de dimension n .

Dans toute cette partie, on considère les espaces euclidiens $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Le fibré cotangent de la variété \mathbb{R}^n est muni de la forme symplectique standard $\omega_n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

Pour $n \geq 1$, on notera S^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} . Son fibré cotangent T^*S^n sera identifié à son fibré tangent

$$\{(u, v) \in T^*(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \|u\|_{n+1} = 1, \langle u, v \rangle = 0\},$$

qui est aussi le fibré tangent unitaire à S^n . La forme $\Omega_{n+1} := \omega_{n+1}|_{T^*S^n}$ est une forme symplectique sur T^*S^n .

On rappelle que le système hamiltonien qui correspond au problème de Kepler de dimension n est $(T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \omega_n, H)$, où H est défini par

$$H(q, p) := \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|}.$$

On va régulariser explicitement le problème de Kepler en restriction à $\{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid H(q, p) < 0\}$.

5.1 Une première régularisation des orbites de Kepler d'énergie négative : la régularisation de Moser.

5.1.1 Projection stéréographique et relevé aux fibrés cotangents.

On appellera N la point de S^n de coordonnées $(0, 0, \dots, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^{n+1} . On rappelle que la projection stéréographique définie par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{N\} \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme d'inverse

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \left(\frac{u_1}{1-u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1-u_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Son relevé aux espaces cotangents est donc en vertu de la proposition 5 le symplectomorphisme donné par

$$\begin{aligned} \Phi : T^*\mathbb{R}^n &\longrightarrow T^*(S^n \setminus \{N\}) \\ (x, \beta) &\longmapsto (\phi(x), \lambda), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda : T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \beta(D_{\phi(x)}\phi^{-1}(u)). \end{aligned}$$

On identifie dans la suite fibrés tangents et cotangents via les isomorphismes

$$\begin{aligned} T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\}) &\longrightarrow T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\})^* & \text{et} & \quad T_x\mathbb{R}^n &\longrightarrow (T_x\mathbb{R}^n)^* \\ v &\longmapsto (u \mapsto \langle v, u \rangle) & & \quad y &\longmapsto (t \mapsto \langle y, t \rangle). \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors la proposition suivante.

Proposition 35 *Le relevé de ϕ a pour expression :*

$$\begin{aligned} \Phi : T^*\mathbb{R}^n &\longrightarrow T^*(S^n \setminus \{N\}) \\ (x, y) &\longmapsto (u(x), v(x, y)), \end{aligned}$$

où $u(x) = \phi(x)$ et $v_k = \frac{\|x\|^2+1}{2}y_k - \langle x, y \rangle x_k$, pour $k = 1, \dots, n$ et $v_{n+1} = \langle x, y \rangle$.

Démonstration

Soit (x, y) un élément de $T^*\mathbb{R}^n$ donné par l'identification entre fibrés tangents et cotangents. Ainsi y représente la forme linéaire

$$\begin{aligned} \beta : T_x\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle y, t \rangle . \end{aligned}$$

On peut définir alors λ comme plus haut, ce qui donne l'expression du relevé de la projection stéréographique. Il s'agit de trouver le représentant de λ dans l'identification $T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\}) \longrightarrow T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\})^*$; autrement dit, $v(x, y)$ est l'unique élément de $T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\})$ tel que $\forall z \in T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\}), \lambda(z) = \langle v(x, y), z \rangle$.

Prenons donc $z \in T_{\phi(x)}(S^n \setminus \{N\})$. D'abord, un calcul aisé montre que

$$D_{\phi(x)}\phi^{-1}(z) = \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + z_{n+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \beta(D_{\phi(x)}\phi^{-1}(z)) \\ &= \langle y, D_{\phi(x)}\phi^{-1}(z) \rangle \\ &= \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i z_i + z_{n+1} \langle y, x \rangle \right) \end{aligned}$$

On observe enfin que $v(x, y)$ comme défini dans la proposition vérifie également $\langle v(x, y), z \rangle = \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i z_i + z_{n+1} \langle y, x \rangle \right)$.

Pour cela, on utilise bien sûr que z vérifie par définition $\langle z, \phi(x) \rangle = 0$.

Ainsi, $v(x, y)$ est bien le représentant de la forme linéaire λ . ■

5.1.2 La régularisation de Moser des niveaux d'énergie strictement négatifs.

Le théorème 1.3 est le point de départ de la régularisation de Moser.

On reprend les notations du début de cette section et on note

$$\begin{aligned} G : T^*(S^n \setminus \{N\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \frac{1}{2}\|v\|^2 \end{aligned}$$

le hamiltonien géodésique sur $T^*(S^n \setminus \{N\})$.

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'à changement de coordonnées symplectiques près à la source, l'inverse $\Phi^{-1} : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*(S^n \setminus \{N\})$ du relevé de la projection stéréographique réalise une équivalence entre le flot du champ de Kepler sur le niveau d'énergie $H = -\frac{1}{2}$, $k < 0$ et le flot géodésique sur $T_1^*(S^n \setminus \{N\})$: c'est l'objet de la régularisation de Moser.

Plus précisément, la transformation géométrique canonique de Fourier, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{can} : T^*\mathbb{R}^n &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^n \\ (q, p) &\longmapsto (p, -q) \end{aligned}$$

est le symplectomorphisme à la source dont il est question.

Il vient alors la définition suivante.

Définition *L'application de régularisation de Moser est la composée $\Phi_M := \Phi^{-1} \circ \mathcal{F}_{can}$.*

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi_M} & T^*(S^n \setminus \{N\}) \\ \mathcal{F}_{can} \downarrow & \nearrow \Phi^{-1} & \\ T^*\mathbb{R}^n & & \end{array}$$

On introduit enfin pour tout $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^n$ tel que $H(q, p) = -\frac{1}{2}$ l'application

$$\begin{aligned} s_{(q,p)} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \frac{1}{\|pr_1 \circ \phi_{X_H}^{\tau}(q,p)\|} d\tau \end{aligned}$$

qui est clairement un difféomorphisme croissant.¹⁵

Si t désigne une variable temporelle prédéfinie, ce difféomorphisme croissant permet de définir une nouvelle variable temporelle (notée abusivement $s_{(q,p)}$) qui s'appelle temps fictif ou paramètre de Levi-Civita.

THÉORÈME 5.1 —

L'application de régularisation de Moser $\Phi_M : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*(S^n \setminus \{N\})$ est un symplectomorphisme.

Elle induit par restriction à l'ensemble de niveau d'énergie $\{H = -\frac{1}{2}\}$ un difféomorphisme

$$\left\{ (q, p) \in T^*\mathbb{R}^n \mid H(q, p) = -\frac{1}{2} \right\} \rightarrow T_1^*(S^n \setminus \{N\}).$$

De plus,

$$\forall (q, p) \in H^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_G}^{s_{(q,p)}(t)} (\Phi_M(q, p)) = \Phi_M (\phi_{X_H}^t(q, p)).$$

En particulier, le champ de Kepler en restriction à la surface correspondant à $H = -\frac{1}{2}$ et le champ de vecteurs géodésique sont équivalents.

Démonstration

La première assertion est évidente. Quant à la deuxième, il est dès lors suffisant d'observer que $H(q, p) = -\frac{1}{2}$ si et seulement si $G(\Phi_M(q, p)) = \frac{1}{2}$. Cela va résulter de la démonstration de la troisième partie du théorème à laquelle on va s'attacher plus longuement.

La composition à la source par la transformation géométrique canonique de Fourier permet de n'avoir à s'occuper essentiellement que de Φ^{-1} . On travaillera donc avec le hamiltonien \tilde{H} sur $T^*\mathbb{R}^n$ défini par $\tilde{H}(x, y) = H \circ \mathcal{F}_{can}^{-1}(x, y) = \frac{\|x\|^2}{2} - \frac{1}{\|y\|}$. Le lemme 5 garantit que

$$\mathcal{F}_{can}^{-1}(\phi_{X_{\tilde{H}}}^t(x, y)) = \phi_{X_H}^t(\mathcal{F}_{can}^{-1}(x, y)),$$

ce que l'on peut réécrire aussi en termes des variables (q, p) sous la forme :

$$\boxed{\phi_{X_{\tilde{H}}}^t(\mathcal{F}_{can}(q, p)) = \mathcal{F}_{can}(\phi_{X_H}^t(q, p)).}$$

Maintenant, on affirme que

$$\boxed{\forall (x, y) \in \tilde{H}^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_G}^{\tilde{s}_{(x,y)}(t)}(\Phi^{-1}(x, y)) = \Phi^{-1}(\phi_{X_{\tilde{H}}}^t(x, y)).}$$

En effet, le hamiltonien \tilde{G} défini sur $T^*\mathbb{R}^n$ par $\tilde{G}(x, y) := G \circ \Phi(x, y) = \frac{(\|x\|^2 + 1)^2 \|y\|^2}{8}$ vérifie

$$\forall (x, y) \in T^*\mathbb{R}^n, \phi_{X_G}^s(\Phi^{-1}(x, y)) = \Phi^{-1}(\phi_{X_{\tilde{G}}}^s(x, y)),$$

en vertu du lemme 5. Ensuite, le champ de vecteurs hamiltonien X_F associé à $F(x, y) := \sqrt{2\tilde{G}(x, y)} - 1$ est en restriction à $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid \tilde{G}(x, y) = \frac{1}{2}\}$ égal au champ de vecteurs hamiltonien $X_{\tilde{G}}$ parce que la dérivée en $\frac{1}{2}$ de la fonction $u \mapsto \sqrt{2u} - 1$ vaut 1. Dès lors, la relation entre les flots de X_F et de X_G s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \tilde{G}^{-1} \left(\left\{ \frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_G}^s(\Phi^{-1}(x, y)) = \Phi^{-1}(\phi_{X_F}^s(x, y)).$$

Enfin, on remarque que $\tilde{H}(x, y) = \frac{G(x, y)}{\|y\|} - \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que

$$\forall (x, y) \in \tilde{H}^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right) = F^{-1}(\{0\}), X_{\tilde{H}}(x, y) = \frac{1}{\|y\|} X_F(x, y).$$

Définissons alors pour tout t dans un intervalle de définition du flot de $X_{\tilde{H}}$, $\tilde{s}_{(x,y)}(t) := \int_0^t \frac{d\tau}{\|pr_2 \circ \phi_{X_{\tilde{H}}}^\tau(x, y)\|}$ qui n'est autre que $s_{(q,p)}(t)$ si $(x, y) = \mathcal{F}_{can}(q, p)$. Le lemme 4 permet d'obtenir

$$\forall (x, y) \in \tilde{H}^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_{\tilde{H}}}^t(x, y) = \phi_{X_F}^{\tilde{s}_{(x,y)}(t)}(x, y).$$

Ainsi, il résulte à partir des relations précédentes :

$$\forall (x, y) \in \tilde{H}^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_G}^{\tilde{s}_{(x,y)}(t)}(\Phi^{-1}(x, y)) = \Phi^{-1}(\phi_{X_{\tilde{H}}}^t(x, y)).$$

Au final, on obtient bien à partir des deux relations encadrées :

$$\forall (q, p) \in H^{-1} \left(\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right), \phi_{X_G}^{s_{(q,p)}(t)}(\Phi_M(q, p)) = \Phi_M(\phi_{X_H}^t(q, p)).$$

15. Cette application apparaîtra assez naturellement dans la preuve du théorème de régularisation de Moser.

Remarques

- L'ensemble de niveau d'énergie $\{H = -\frac{1}{2}\}$ est donc compactifié dès lors que $T_1^*(S^n \setminus \{N\})$ l'est ; or, cela est possible en complétant $T_1^*(S^n \setminus \{N\})$ en la variété compacte $T_1^*S^n$ (il convient de rajouter exactement $\{N\} \times \{v \in T_N^*S^n \mid \|v\| = 1\}$ qui est topologiquement S^{n-1}).
- Plus généralement, une modification de l'application de Moser (par multiplication des variables qui entrent en jeu par des scalaires strictement positifs) fournirait une compactification de chacun des ensembles de niveau d'énergie $\{H = k\}$, où $k < 0$ en la variété $T_1^*S^n$.

Essayons maintenant de tirer les conséquences géométriques et physiques du théorème de régularisation de Moser.

La régularisation de Moser a une interprétation géométrique qui résulte des propriétés de la projection stéréographique. Chaque orbite de Kepler non-dégénérée dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (qui est une ellipse) devient un grand cercle sur la sphère S^n (qui ne passe pas par le pôle nord N). En outre, le pôle nord N de S^n correspond via la projection stéréographique à "l'infini" dans l'espace des $x \in \mathbb{R}^n$, ou encore dans l'espace des $p \in \mathbb{R}^n$ (via la transformation géométrique canonique de Fourier) qui représente physiquement la vitesse ou la quantité de mouvement de la particule en mouvement ; le point N représente donc aussi l'origine $q = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque l'on doit avoir $H(q, p)$ constant. Les vecteurs unitaires tangents à S^n au point N (qui permettent la compactification de chacun des niveaux d'énergie strictement négative) représentent des directions à l'origine $q = 0$ dans \mathbb{R}^n qui définissent les droites ou orbites de collision (il s'agit des ellipses dégénérées de Kepler). Les orbites de collision correspondent donc dans la régularisation de Moser aux géodésiques de S^n qui passent par N : ce sont les grands cercles sur S^n qui passent par N .

Plus précisément, le mouvement d'une particule dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dont la trajectoire est une orbite de collision et dont la vitesse est infinie à l'origine se régularise en un mouvement sur S^n dont la trajectoire est une géodésique passant par N et dont la vitesse (en terme de la variable temporelle fictive de Levi-Civita) est finie en N .

5.1.3 Mise en évidence d'une symétrie cachée du problème de Kepler.

La régularisation de Moser présente l'intérêt d'exposer la $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée du problème de Kepler. Rappelons que l'action naturelle de $SO(n+1)$ sur S^n se remonte en une action hamiltonienne de $SO(n+1)$ sur T^*S^n , qui est donnée après identification entre fibrés tangent et cotangent par l'application

$$\begin{aligned} SO(n+1) \times T^*S^n &\longrightarrow T^*S^n \\ (A, (u, v)) &\longmapsto (Au, Av) \end{aligned}$$

dont une application moment est donnée par

$$\begin{aligned} \mu_{n+1|T^*S^n} : T^*S^n &\longmapsto \mathfrak{so}(n+1)^* \\ (u, v) &\longmapsto (\xi \mapsto \langle \xi u, v \rangle) \end{aligned}$$

Comme le hamiltonien géodésique G sur T^*S^n est invariant sous l'action de $SO(n+1)$, les composantes de l'application moment, notées $\Gamma_{i,j}$ où $1 \leq i < j \leq n+1$, sont des intégrales premières du système hamiltonien $(T^*S^n, \omega_{n+1|T^*S^n}, G)$. Le calcul des crochets de Lie entre champs hamiltoniens associés $X_{\Gamma_{i,j}}$ montrent que ces champs de vecteurs engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1)$.

D'abord les rapatriées par l'application de Moser des $\Gamma_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$ sont les composantes $\Gamma_{i,j}$ de l'application moment associée à l'action hamiltonienne de $SO(n)$ sur $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

On vérifie que les rapatriées par l'application de Moser des $\Gamma_{i,n+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont données par

$$\Phi_M^* \Gamma_{i,n+1}(q, p) = \frac{-1 + \|p\|^2}{2} q_i - \langle q, p \rangle p_i.$$

Un calcul élémentaire montre que $\{H, \Gamma_{i,n+1}\}(q, p) = p_i (H(q, p) + \frac{1}{2})$. A partir de là, il n'est plus difficile de voir que si l'on définit $L_i(q, p) := -\Gamma_{i,n+1} + q_i(H(q, p) + \frac{1}{2}) = -\langle p, q \rangle p_i + \|p\|^2 q_i - \frac{q_i}{\|q\|}$, alors on a

$$\{H, L_i\}(q, p) = -\{H, \Gamma_{i,n+1}\}(q, p) + p_i(H(q, p) + \frac{1}{2}) = 0.$$

De cette manière, on obtient n intégrales premières supplémentaires du hamiltonien H , donc n symétries infinitésimales "cachées". Notons qu'en conséquence du théorème de régularisation de Moser, on retrouve aussi l'expression

des composantes du vecteur de Runge-Lenz bien connu des physiciens.

Enfin, les fonctions $\mu_{i,j} = \Phi_M^* \Gamma_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) et $\mu_{i,n+1} := \frac{1}{\sqrt{-2H}} L_i$ forment $\frac{n(n+1)}{2}$ intégrales premières de H et les champs hamiltoniens associés engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1)$.

Par extension, on en déduit que le problème de Kepler restreint aux niveaux d'énergie strictement négative constante présente une $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie.

5.1.4 Limites de l'application de Moser.

D'abord, il résulte du théorème 5.1 que l'application de Moser ne fournit pas une complétion d'une restriction du problème de Kepler mais une régularisation si l'on use du vocabulaire précis introduit au paragraphe 3.2.3.

Ensuite, comme on l'a constaté à la fin du paragraphe 5.1.2, la régularisation de Moser s'applique séparément à chaque niveau d'énergie $\{H = k\}$, où $k < 0$. De surcroît, la $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée mise en évidence est valide pour le problème de Kepler restreint à un niveau d'énergie négative fixée. En cela, la régularisation de Moser présente une certaine limite.

Le paragraphe suivant expose une régularisation "simultanée" de toutes les orbites de Kepler d'énergie de même signe et qui aura l'avantage d'être une complétion (au sens de la définition du paragraphe 3.2.3) pour un autre système hamiltonien.

5.2 La régularisation de Ligon-Schaaf.

On présente maintenant une régularisation due à Ligon et Schaaf qui a l'avantage d'exposer de manière globale la $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée du problème de Kepler sur $\{H < 0\}$.

Les notations adoptées dans cette partie sont les suivantes :

- $\Sigma_- := \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid H(q, p) < 0\}$
- si M désigne une variété, on notera $T^+M := \{(x, y) \in T^*M \mid y \neq 0\}$.

5.2.1 L'application de Ligon-Schaaf comme adaptation de l'application de Moser.

La construction de l'application de Ligon-Schaaf s'appuie sur la considération de l'application

$$\begin{aligned} \Pi_M : \Sigma_- &\longrightarrow T_1^+(S^n \setminus \{N\}) \\ (q, p) &\longmapsto (u, v) \end{aligned}$$

où

$$u = (\sqrt{-2H(q, p)} \|q\| p, \|q\| \|p\|^2 - 1)$$

et

$$v = \left(-\frac{q}{\|q\|} + \langle q, p \rangle p, -\sqrt{-2H(q, p)} \langle q, p \rangle \right)$$

qui, on le vérifie, est bien définie.

L'action de \mathbb{R}_+^* sur Σ_- définie par $\lambda \cdot (q, p) = (\lambda^2 q, \lambda^{-1} p)$ laisse invariante Π_M et on remarque que sur l'ensemble $H^{-1}(\{-\frac{1}{2}\})$, on a $\Pi_M(q, p) = \Phi_M(q, p)$.

Ainsi, l'application Π_M est une fibration lisse (dite fibration de Moser) dont les fibres sont les orbites de l'action de \mathbb{R}_+^* .

On en vient à la définition de l'application de Ligon-Schaaf.

Définition *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_{LS} : \Sigma_- &\longrightarrow T^+(S^n \setminus \{N\}) \\ (q, p) &\longmapsto (\xi, \eta) = \left((\cos v_{n+1})u + (\sin v_{n+1})v, \frac{1}{\sqrt{-2H}} (-(\sin v_{n+1})u + (\cos v_{n+1})v) \right) \end{aligned}$$

où $(u, v) = \Pi_M(q, p)$ est appelée application de Ligon-Schaaf.

Remarque

L'application de Ligon-Schaaf est bien définie. Donnons-en une justification rapide.

Par la considération de la fibration de Moser, il vient d'une part $\Phi_{LS}(\Sigma_-) \subset T^+S^n$. D'autre part, s'il advenait que $(\cos v_{n+1})u_{n+1} + (\sin v_{n+1})v_{n+1} = 1$, alors puisque $\|\xi\| = 1$, on aurait $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$, puis $\eta_{n+1} = 0$ car $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Autrement dit, cela conduirait au système :

$$\begin{cases} (\cos v_{n+1})u_{n+1} + (\sin v_{n+1})v_{n+1} = 1 \\ -(\sin v_{n+1})u_{n+1} + (\cos v_{n+1})v_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Multipliant la première ligne du système par $\sin v_{n+1}$ et la seconde par $\cos v_{n+1}$, on obtient par somme des deux lignes $v_{n+1} = \sin v_{n+1}$, c'est-à-dire $v_{n+1} = 0$.

Mais alors, $u_{n+1} = 1$, puis $\|q\| \|p\|^2 = 2$ ou encore $H(q, p) = 0$, ce qui est exclu.

Ainsi, $\Phi_{LS}(\Sigma_-) \subset T^+(S^n \setminus \{N\})$. □

On va voir maintenant que l'application de Ligon-Schaaf (qui est évidemment lisse) présente des propriétés remarquables.

Rappelons d'abord que la variété T^*S^n est munie d'une structure symplectique induite par la 2-forme $\sum_{i=1}^{n+1} d\xi_i \wedge d\eta_i$

où les ξ_i, η_i sont les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ en restriction à T^*S^n .

En outre, $T^+(S^n \setminus \{N\})$ est une sous-variété ouverte de T^*S^n , donc si l'on note $\hat{\xi}_i = \xi_i|_{T^+(S^n \setminus \{N\})}$ et $\hat{\eta}_i = \eta_i|_{T^+(S^n \setminus \{N\})}$,

alors $\left(T^+(S^n \setminus \{N\}), \sum_{i=1}^{n+1} d\hat{\xi}_i \wedge d\hat{\eta}_i \right)$ est encore une variété symplectique.

Ceci étant dit, on énonce maintenant une première propriété forte de l'application de Ligon-Schaaf.

Proposition 36 *L'application Φ_{LS} est un symplectomorphisme.*

Démonstration

On donne quelques indications pour montrer que l'application Φ_{LS} est symplectique.

Il convient de commencer par écrire $\Phi_{LS}^* \left(\sum_{i=1}^{n+1} d\hat{\xi}_i \wedge d\hat{\eta}_i \right) = d \left(\sum_{i=1}^{n+1} \Phi_{LS}^* \hat{\xi}_i d(\Phi_{LS}^* \hat{\eta}_i) \right)$. Ensuite, on note que

$$\Phi_{LS}^* \hat{\xi}_i = u_i \cos v_{n+1} + v_i \sin v_{n+1}$$

et

$$\Phi_{LS}^* \hat{\eta}_i = \frac{1}{\sqrt{-2H}} (u_i \sin v_{n+1} - v_i \cos v_{n+1}),$$

où (u, v) sont ceux qui apparaissent dans la définition de Φ_{LS} . Enfin, on utilise que $(u, v) \in T_1^*S^n$, ce qui fournit bien sûr les trois relations

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i du_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} v_i dv_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} (u_i dv_i + v_i du_i) = 0 = 0.$$

Un calcul qui s'appuie sur ces relations montre alors

$$\begin{aligned} \Phi_{LS}^* \left(\sum_{i=1}^{n+1} d\hat{\xi}_i \wedge d\hat{\eta}_i \right) &= d \left(- \sum_{i=1}^{n+1} q_i dp_i - d(\langle q, \rangle p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} dp_i \wedge dq_i. \end{aligned}$$

Montrons à présent que Φ_{LS} est un difféomorphisme. Pour ce faire, on va exhiber son inverse $\Psi_{LS} : (\xi, \eta) \mapsto (q, p)$.

On commence par montrer que l'équation $\theta = \xi_{n+1} \sin \theta - \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta\|} \cos \theta$ définit une fonction θ de (ξ, η) qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur tout $T^+(S^n \setminus \{N\})$. Pour cela, commençons par étudier à (ξ^0, η^0) fixés, la fonction $\theta \mapsto \theta - \xi_{n+1}^0 \sin \theta - \frac{\eta_{n+1}^0}{\|\eta^0\|} \cos \theta$. Sa

dérivée se met sous la forme $\theta \mapsto 1 - \left((\xi_{n+1}^0)^2 + \left(\frac{\eta_{n+1}^0}{\|\eta^0\|^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - \theta_0)$, où $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Or, il n'est pas difficile de voir que

$(\xi_{n+1}^0)^2 + \left(\frac{\eta_{n+1}^0}{\|\eta^0\|^2} \right)^2 \leq 1$, ce qui implique que la fonction $\theta \mapsto \theta - \xi_{n+1}^0 \sin \theta - \frac{\eta_{n+1}^0}{\|\eta^0\|} \cos \theta$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Elle s'annule donc une unique fois sur \mathbb{R} , en un réel noté $\theta(\xi^0, \eta^0)$.
Le théorème des fonctions implicites appliqué à

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((\xi, \eta), \theta) & \longmapsto & \theta - \xi_{n+1} \sin \theta - \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta\|} \cos \theta \end{array}$$

montre que pour tout $(\xi^0, \eta^0) \in \mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})$, il existe des voisinages $U_{(\xi^0, \eta^0)}$ de (ξ^0, η^0) dans $\mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})$ et $V_{(\xi^0, \eta^0)}$ de $\theta(\xi^0, \eta^0)$ dans \mathbb{R} et une application $\theta_{(\xi^0, \eta^0)} : U_{(\xi^0, \eta^0)} \longrightarrow V_{(\xi^0, \eta^0)}$ qui évaluée en (ξ^0, η^0) vaut $\theta(\xi^0, \eta^0)$ et telle que

$$\{(\eta, \xi, \theta) \in U_{(\xi^0, \eta^0)} \times V_{(\xi^0, \eta^0)} \mid F(\eta, \xi, \theta) = 0\} = \{(\eta, \xi, \theta_{(\xi^0, \eta^0)}(\eta, \xi))\}.$$

Maintenant, l'unicité de $\theta(\xi^0, \eta^0)$ pour chaque (ξ^0, η^0) montre qu'il existe une fonction θ définie sur tout $\mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})$ dont la restriction à chacun des voisinages $U_{(\xi^0, \eta^0)}$ est la fonction $\theta_{(\xi^0, \eta^0)}$.

On définit à présent l'application

$$\Psi_{LS} : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\}) & \longrightarrow & \Sigma_- \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & (q, p), \end{array}$$

avec

$$q = \|\eta\| \left((\xi_{n+1} - \cos \theta) \underline{\eta} - (\eta_{n+1} - \|\eta\| \sin \theta) \underline{\xi} \right)$$

et

$$p = \frac{\frac{1}{\|\eta\|} \eta \sin \theta + \underline{\xi} \cos \theta}{\|\eta\| \left(1 - \xi_{n+1} \cos \theta - \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta\|} \sin \theta \right)},$$

où $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ et où on a écrit θ pour $\theta(\xi, \eta)$ par souci de simplification d'écriture.

On vérifie que Ψ_{LS} est bien définie et à valeurs dans Σ_- . Il faut essentiellement s'assurer que $1 - \xi_{n+1} \cos \theta - \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta\|} \sin \theta$

ne s'annule pas pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})$. Si c'était le cas, on aurait par définition de θ , $\xi_{n+1}^2 + \left(\frac{\eta_{n+1}}{\|\eta\|} \right)^2 = 1 + \theta^2$, donc nécessairement $\theta = 0$ puisque le membre de gauche est inférieur à 1; or, cela impliquerait $\xi_{n+1} = 1$.

A ce stade, il reste à observer que Ψ_{LS} est de classe \mathcal{C}^∞ et que les égalités $\Phi_{LS} \circ \Psi_{LS} = Id_{\mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})}$ et $\Psi_{LS} \circ \Phi_{LS} = Id_{\Sigma_-}$ sont vraies. ■

Remarque

Comme on a explicité l'inverse de Φ_{LS} , il vient aussitôt :

$$H \circ \Phi_{LS}^{-1}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\|\eta\|^2},$$

ce qui motive la définition suivante. □

Définition *Le hamiltonien de Delaunay est la fonction D définie sur $\mathbb{T}^+ S^n$ par $D(u, v) = -\frac{1}{2\|v\|^2}$.*

On reformule la remarque précédente par le théorème de complétion de Ligon-Schaaf suivant.

THÉORÈME 5.2 —

L'application de Ligon-Schaaf Φ_{LS} est un symplectomorphisme qui conjugue les flots des champs hamiltoniens de Kepler sur Σ_- et de Delaunay sur $\mathbb{T}^+(S^n \setminus \{N\})$. En particulier, cette application induit une complétion du problème de Kepler en le système hamiltonien de Delaunay $(\mathbb{T}^+ S^n, D)$.

Ce n'est pas tout : on retrouve que le champ de Kepler est équivalent au flot géodésique de $S^n \setminus \{N\}$ grâce à la proposition suivante, mais cette fois, cela est valable sur tout $\{H < 0\}$.

Proposition 37 *Le champ hamiltonien de Delaunay X_D est équivalent au champ de vecteurs géodésique X_G sur $\mathbb{T}^+ S^n$.*

Démonstration

Il suffit d'observer que $D = \psi \circ G$, où

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & -\frac{1}{4z}, \end{array}$$

si bien que $X_D = \frac{1}{\|v\|^2} X_G$. ■

Remarque

Cette proposition mise en relation avec le théorème de Ligon-Schaaf précédent implique que Φ_{LS} fournit également une régularisation du problème de Kepler restreint aux orbites d'énergie négative en le système hamiltonien géodésique sur $\mathbb{T}^+ S^n$. □

5.2.2 $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée et orbites de l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n .

Considérons comme au paragraphe 5.1.3 l'action hamiltonienne de $SO(n+1)$ sur T^*S^n . Cette action préserve T^+S^n et la restriction de l'action de $SO(n+1)$ à T^+S^n est encore hamiltonienne.

On note que si (e_1, \dots, e_{n+1}) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n , l'application linéaire $\phi : \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{so}(n+1)^*$ définie par

$$\forall 1 \leq i < j \leq n+1, \forall A \in \mathfrak{so}(n+1), \phi(e_i \wedge e_j)(A) = \langle Ae_i, e_j \rangle$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels $SO(n+1)$ -équivariant.

Une application moment pour l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : T^+S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ (u, v) &\longmapsto (\mathcal{J}_{i,j}(u, v))_{1 \leq i < j \leq n+1}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{J}_{i,j}(u, v) = u_i v_j - u_j v_i$. On note comme d'habitude $X_{\mathcal{J}_{i,j}}$ le champ de vecteurs hamiltonien sur T^+S^n associé à la fonction $\mathcal{J}_{i,j}$.

Comme le hamiltonien de Delaunay sur T^+S^n (équivalent au hamiltonien géodésique comme on l'a vu) est invariant sous l'action de $SO(n+1)$, on en déduit que les $X_{\mathcal{J}_{i,j}}$ (qui engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1)$) forment $\frac{n(n+1)}{2}$ symétries infinitésimales pour le système hamiltonien de Delaunay sur T^+S^n .

L'application de Ligon-Schaaf révèle donc une $\mathfrak{so}(n+1)$ -symétrie cachée du problème de Kepler.

En outre, les $\frac{n(n+1)}{2}$ applications tirées-en-arrière par Φ_{LS} des $\mathcal{J}_{i,j}$ sont les $\mathcal{L}_{i,j}$ d'expressions données par :

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i < j \leq n, \mathcal{L}_{i,j}(q, p) = q_i p_j - q_j p_i \\ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \mathcal{L}_{i,n+1}(q, p) = -\frac{1}{\sqrt{-2H(q, p)}} \left(\|p\|^2 q_i - \frac{q_i}{\|q\|} - \langle q, p \rangle p_i \right). \end{cases}$$

Là encore, on retrouve via la régularisation de Ligon-Schaaf l'expression du vecteur de Runge-Lenz.

Puisque l'on a $\Phi_{LS}^* X_D = X_H$, les $X_{\mathcal{L}_{i,j}}$ forment donc $\frac{n(n+1)}{2}$ symétries infinitésimales du problème de Kepler d'espace des phases $\{H < 0\}$ qui engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1)$.

Enfin, on s'intéresse aux orbites de l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n ; on verra notamment que l'application de Ligon-Schaaf relie les niveaux d'énergie négative fixée du problème de Kepler à ces orbites.

Remarquons d'abord que chacune de ces orbites est compacte car $SO(n+1)$ est un groupe compact, donc est en particulier une "vraie" sous-variété de T^+S^n .

Remarquons aussi que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la sous-variété $O_r := \{(u, v) \in T^+S^n \mid \|v\| = r\}$ de T^+S^n de dimension $2n-1$ est laissée stable par l'action de $SO(n+1)$.

Proposition 38 *Les orbites de l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n sont exactement les sous-variétés compactes O_r , lorsque r décrit \mathbb{R}_+^* .*

Démonstration

Au vu des remarques qui précèdent la proposition, il suffit de montrer que pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $SO(n+1)$ agit transitivement sur O_r .

Soient alors $r > 0$ fixé, (u, v) un élément de O_r et (u_0, v_0) l'élément de O_r donné par $u_0 = N = (0, 0, \dots, 1)$ et $v_0 = (r, 0, \dots, 0)$.

Comme l'action de $SO(n+1)$ sur S^n est transitive, il existe $R_1 \in SO(n+1)$ tel que $R_1 u = u_0$.

Le sous-groupe d'isotropie de u_0 (qui est aussi le dernier vecteur constituant la base canonique de \mathbb{R}^{n+1}) est formé de l'ensemble des éléments

$$\begin{pmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\tilde{R} \in SO(n)$.

Comme $R_1 \in O(n+1)$, $0 = \langle u, v \rangle = \langle R_1 u, v \rangle = \langle u_0, R_1 v \rangle$, de sorte que $R_1 v$ est de la forme $(\eta_1, \dots, \eta_n, 0)$ avec $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 = r^2$; autrement dit, $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)$ est un élément de la sphère euclidienne S_r^{n-1} de rayon r dans \mathbb{R}^n .

Mais puisque l'action de $SO(n)$ sur S_r^{n-1} est transitive, il existe $\tilde{R} \in SO(n)$ tel que $\tilde{R} \eta$ soit égal au vecteur de \mathbb{R}^n donné par $(r, 0, \dots, 0)$. Il est maintenant élémentaire de vérifier que l'élément

$$g := \begin{pmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times R_1$$

envoie u sur u_0 et v sur v_0 .

Cela achève la démonstration de la proposition. ■

Remarque

Les orbites O_r pour l'action de $SO(n+1)$ sur T^+S^n peuvent être considérées comme les régularisées de Ligon-Schaaf des niveaux d'énergie Σ_e où $e < 0$.

Plus précisément, le fait que $D \circ \Phi_{LS}(q, p) = H(q, p)$ implique que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, l'application

$$\begin{aligned} \Sigma_{-\frac{1}{2r^2}} &\longrightarrow O_r \\ (q, p) &\longmapsto \Phi_{LS}(q, p) \end{aligned}$$

définit un plongement de $\Sigma_{-\frac{1}{2r^2}}$ dans O_r d'image $\{(u, v) \in T^*S^n \mid u \neq N \text{ et } \|v\| = r\} = \{(u, v) \in O_r \mid u \neq N\}$.

On note que l'ensemble qui correspond aux orbites de collision (qui viennent se rajouter après régularisation de Ligon-Schaaf) dans O_r est $\{N\} \times \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = r\}$, diffeomorphe à S^{n-1} ; cela généralise l'observation faite à la fin de la partie 4 pour $n = 2$ avec la régularisation de Levi-Civita en ce qui concerne les orbites de collision. \square

5.2.3 Bilan sur la régularisation de Ligon-Schaaf.

On vient de présenter une complétion de tous les niveaux d'énergie négative à la fois. Une modification légère de l'application de Ligon-Schaaf présentée (essentiellement par le changement de signes et par le changement des fonctions trigonométriques en fonctions hyperboliques) permettrait d'adapter la régularisation de Ligon-Schaaf précédente au cas des niveaux d'énergie positive. En outre, dans le cas du problème de Kepler restreint aux niveaux d'énergie positive ($\{H > 0\}$), cela fournirait une régularisation par le hamiltonien géodésique sur T^+H^n (H^n étant l'espace hyperbolique de dimension n) et on découvrirait une $\mathfrak{so}(1, n)$ -symétrie cachée.

Si l'application de Ligon-Schaaf présentée permet la régularisation en le système hamiltonien géodésique sur T^+S^n de tous les niveaux d'énergie $H < 0$, il est à noter néanmoins que, contrairement au relevé Φ de la projection stéréographique qui était central dans la régularisation de Moser, cette application ne provient pas d'un difféomorphisme "en-bas".

5.3 Extension à des systèmes hamiltoniens plus généraux.

Après avoir étudié quelques régularisations du problème de Kepler, on peut se demander s'il est possible de les généraliser à d'autres problèmes. Cette sous-partie consiste en quelque sorte en une ouverture à la question d'une régularisation d'autres systèmes hamiltoniens à force centrale.

Précisément, on généralise le travail de régularisation de Moser aux hamiltoniens $H_k(y, x) := \frac{\|x\|^2}{2} - \frac{1}{\|y\|^{\frac{2}{2-k}}}$, où $0 \leq k < 2$ et $(y, x) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Le hamiltonien de Kepler correspond à $k = 0$.

On reprend la projection stéréographique $\phi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et son relevé aux cotangents Φ considérés au paragraphe 5.1. En outre, on continue d'identifier fibrés cotangents et fibrés tangents comme on le faisait dans le paragraphe mentionné.

On définit

$$f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda(k)}{(\|x\|^2 + 1)^k},$$

où $\lambda(k) = \frac{4}{(2-k)^{2-k}}$, puis $\sigma_k := f_k \circ \phi$ sur $S^n \setminus \{N\}$.

Cela permet de définir une métrique g_k sur $S^n \setminus \{N\}$ par $(g_k)_u(v, v) := \sigma_k(u) \|v\|^2$ qui est conforme à la métrique euclidienne standard en restriction à $S^n \setminus \{N\}$ pour tout $0 \leq k \leq 2$ et qui se prolonge en la métrique ronde sur S^n dans le cas képlerien $k = 0$.

On s'intéresse bien sûr ici au hamiltonien géodésique sur $T^*(S^n \setminus \{N\})$ pour la métrique g_k sur $S^n \setminus \{N\}$, qui est :

$$G_k(u, v) := \frac{1}{2} \sigma_k(u) \|v\|^2.$$

Le fibré cotangent unitaire pour la métrique g_k est bien entendu $G_k^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

Le résultat qui fait l'objet d'une généralisation du travail effectué par Moser est le suivant.

Proposition 39 *En tout point (u, v) de $G_k^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, on a*

$$\phi_{X_{H_k}}^t(\Phi(u, v)) = \Phi(\phi_{X_{G_k}}^{s_{\Phi(u, v)}^{(k)}(t)}(u, v)),$$

$$\text{où } s_{(x, y)}^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\|\text{pr}_2 \circ \phi_{X_{H_k}}^\tau(x, y)\|^{\frac{2}{2-k}}}.$$

Démonstration

On présente simplement une esquisse qui permet de fournir les étapes majeures pour établir la formule voulue. On pose $\tilde{G}_k(x, y) := G_k \circ \Phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{8} \lambda(k) (\|x\|^2 + 1)^{2-k} \|y\|^2$ puis $f_k(t) = \alpha_k t^{\frac{1}{2-k}} - \beta_k$, où

$$\begin{cases} \alpha_k = (2-k) \times 2^{\frac{k-1}{2-k}} \\ \beta_k = (2-k) 2^{\frac{k}{2(2-k)}} \end{cases}$$

de sorte que $f_k'(\frac{1}{2}) = 1$ et $f_k(\frac{1}{2}) = 0$. On pose alors $K_k(x, y) := f_k \circ \tilde{G}_k(x, y) = \frac{(\|x\|^2 + 1) \|y\|^{\frac{2}{2-k}}}{2} - 1$, de sorte que $\{\tilde{G}_k(x, y) = \frac{1}{2}\} = \{K_k(x, y) = 0\}$ puisque f_k est bijective.

Il reste alors à remarquer que $H_k(x, y) = \frac{K_k(x, y)}{\|y\|^{\frac{2}{2-k}}} - \frac{1}{2}$ et à écrire les conséquences en termes de flots de champs de vecteurs. ■

Remarques

- Il est impératif de noter que pour $0 < k < 2$, le flot du champ de vecteurs X_{G_k} n'est pas nécessairement complet, la métrique g_k n'étant pas définie sur un compact et ne se prolongeant pas en une métrique sur S^n ; aussi, le résultat précédent ne fournit pas nécessairement une régularisation du système hamiltonien obtenu en prenant pour hamiltonien H_k .

- Par ailleurs, on peut trouver dans la littérature des articles qui tentent d'adapter la régularisation de Levi-Civita (étudiée pour le problème de Kepler en dimension 2 au paragraphe 4.2) à des systèmes hamiltoniens à force centrale plus généraux définis encore sur une variété symplectique de dimension 4. Par exemple, on peut considérer les hamiltoniens de la forme $H_k(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|^{2-\frac{2}{k}}}$ où q, p sont des variables complexes et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et étudier le système correspondant à la sous-variété $\{H = -c^2\}$ où $c \in \mathbb{R}_+^*$; le problème de Kepler correspond à $k = 2$. Notamment, on peut généraliser l'application de Levi-Civita à un entier $k \geq 2$ quelconque en posant $q = 2z^k$ et $p = \frac{cw}{z^{k-1}}$; on obtiendrait un revêtement à k feuillets au lieu de 2 et la sous-variété à considérer serait maintenant $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |w|^2 + |z|^{2(k-1)} = \frac{1}{2c^2}\}$. \square

6 Problème de Kepler et géométrie de l'univers d'Einstein.

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Par ailleurs, si M désigne une variété, on notera T^+M la restriction du fibré cotangent de M aux vecteurs cotangents non nuls.

L'un des principaux objectifs est ici de voir en quoi le problème de Kepler est lié à la géométrie lorentzienne. Notamment, il conviendra d'introduire la variété d'Einstein et de voir en quoi elle est reliée à la variété de Kepler T^+S^n (qui apparaît comme l'espace des phases du problème régularisé pour les orbites de Kepler d'énergie négative). Aussi, nous verrons que T^+S^n est symplectomorphe à une orbite coadjointe pour l'action de $O(1, n+1)$ sur $\mathfrak{o}(1, n+1)^*$.

6.1 La variété de Kepler T^+S^n comme espace de feuilles caractéristiques.

On commence par introduire la variété d'Einstein et la géométrie (notamment lorentzienne) qui s'y rapporte; on verra comment retrouver ensuite la variété de Kepler T^+S^n à symplectomorphisme près.

6.1.1 Variété d'Einstein et géométrie conforme.

On rappelle d'abord la définition générale suivante.

Définition Soit (M, q) une variété pseudo-riemannienne. Un difféomorphisme $\phi : (M, q) \rightarrow (M, q)$ est dit conforme s'il existe f dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $\forall x \in M, (\phi^*q)_x = f(x)q_x$.

De plus, on appelle groupe conforme de (M, q) le groupe formé par l'ensemble des difféomorphismes conformes de cette variété pseudo-riemannienne.

Pour ce qui va suivre, on note $\mathbb{R}^{2, n+1}$ l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+3} (de base canonique $(e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n+1})$) muni de la forme quadratique

$$q^{2, n+1} : \quad \mathbb{R}^{2, n+1} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$x = \sum_{i=-1}^{n+1} x_i e_i \quad \longmapsto \quad -x_{-1}^2 - x_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

La restriction de $q^{2, n+1}$ à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$, définie positive, sera notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée sera notée $\|\cdot\|$. On note aussi π_{n+2} la projection canonique de $\mathbb{R}^{2, n+1} \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif réel \mathbb{RP}^{n+2} de dimension $n+2$.

Description de la variété d'Einstein.

Définition On appelle variété d'Einstein (ou encore univers d'Einstein) de dimension $n+1$ et on note Ein_{n+1} l'image par π_{n+2} du cône isotrope de $\mathbb{R}^{2, n+1}$. En symboles :

$$\text{Ein}_{n+1} := \pi_{n+2}(\{x \in \mathbb{R}^{2, n+1} \setminus \{0\} \mid q^{2, n+1}(x) = 0\}).$$

Remarque

La variété d'Einstein Ein_{n+1} est bien une variété; il s'agit d'une hypersurface de \mathbb{RP}^{n+2} . \square

Proposition 40 La variété d'Einstein de dimension $n+1$ est difféomorphe à $\frac{S^1 \times S^n}{\mathbb{Z}/2}$, où $\mathbb{Z}/2$ agit sur $S^1 \times S^n$ par antipodie.

Démonstration

On décompose $\mathbb{R}^{2,n+1}$ comme la somme directe orthogonale (pour $q^{2,n+1}$) $\text{Vect}(e_{-1}, e_0) \oplus^\perp \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$ que l'on identifiera simplement avec $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n+1}$ où $q^{2,n+1}$ est définie négative en restriction à \mathbb{R}^2 et définie positive en restriction à \mathbb{R}^{n+1} .

Tout $x \in \mathbb{R}^{2,n+1}$ se décompose donc de manière unique sous la forme $x = y + z$, où $y \in \mathbb{R}^2$ vérifie $q^{2,n+1}(y) \leq 0$ et $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifie $q^{2,n+1}(z) \geq 0$. En plus, si $x \neq 0$, $q^{2,n+1}(x) = 0$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $q^{2,n+1}(z) = -q^{2,n+1}(y) = \lambda^2$. Dans ce cas, x s'écrit $x = \lambda(y' + z')$ où $q^{2,n+1}(z') = -q^{2,n+1}(y') = 1$ et $\pi(x) = \pi(y' + z')$.

Ainsi, identifiant $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid -q^{2,n+1}(y) = 1\}$ à S^1 et $\{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q^{2,n+1}(z) = 1\}$ à S^n , on vient de définir une application surjective

$$S^1 \times S^n \longrightarrow \text{Ein}_{n+1}.$$

Cette application est lisse et est invariante sous l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2$ sur $S^1 \times S^n$. En outre, si $(y, z), (y', z') \in S^1 \times S^n$ sont tels que $\pi(y + z) = \pi(y' + z')$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} y' = \lambda y \\ z' = \lambda z \end{cases}$. Ainsi $q^{2,n+1}(z') = \lambda^2 q^{2,n+1}(z)$, ce qui conduit à $\lambda = \pm 1$.

L'application construite précédemment induit une bijection $\frac{S^1 \times S^n}{\mathbb{Z}/2} \longrightarrow \text{Ein}_{n+1}$.

Enfin, le calcul de la différentielle en un point $(y, z) \in S^1 \times S^n$ permet de voir que cette dernière est un isomorphisme. ■

Remarques

- Comme la projection canonique $S^1 \longrightarrow S^1/(\mathbb{Z}/2)$ définit un fibré principal, Ein_{n+1} correspond aussi au fibré associé $S^1_{\mathbb{Z}/2}[S^n]$ sur $S^1/(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{R}P^1$. En particulier, Ein_{n+1} est localement difféomorphe à $S^1/(\mathbb{Z}/2) \times S^n$, soit encore à $S^1 \times S^n$.
- Dans la suite, un élément générique x de Ein_{n+1} sera en outre noté simplement (x_0, x_1, \dots, x_n) (sous-entendu modulo $\mathbb{Z}/2$) où x_0 est un élément de S^1 et (x_1, \dots, x_n) est un élément de S^n . La métrique $q^{2,n}$ est en restriction à S^1 partout définie négative et est en restriction à S^n partout définie positive. Cette dernière remarque nous sera utile au paragraphe suivant. □

Quelques sous-ensembles remarquables de la variété d'Einstein. Voyons ce que deviennent dans Ein_{n+1} les intersections du cône isotrope \mathcal{C} de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ avec différents sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ de signature donnée.

- Commençons par le cas où E est un sous-espace vectoriel de dimension $k+2$ où $0 \leq k \leq n$ tel que la restriction de $q^{2,n+1}$ à E soit de signature $(1, k+1)$.
On choisit une base $(f_0, f_1, \dots, f_{k+1})$ de E orthonormale pour $q^{2,n+1}|_E$ que l'on complète en une base $(f_0, f_1, \dots, f_{n+2})$ de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. Un vecteur générique $x = \sum_{i=0}^{n+2} x_i f_i$ de $\mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\}$ appartient alors à $E \cap \mathcal{C}$ si et seulement si $x_{k+2} = \dots = x_{n+2} = 0$ et $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 0$.
On peut dès lors identifier $\pi_{n+2}(E \cap \mathcal{C})$ à la sphère unité de \mathbb{R}^{k+1} : l'application

$$\begin{aligned} S^k &\longrightarrow \pi_{n+2}(E \cap \mathcal{C}) \\ (x_1, \dots, x_{k+1}) &\longmapsto \pi_{n+2} \left(f_0 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i f_i \right) \end{aligned}$$

constitue un difféomorphisme explicite.

- Dans le cas où E est un sous-espace vectoriel de dimension $k+2$ où $0 \leq k \leq n$ tel que la restriction de $q^{2,n+1}$ à E est de signature $(2, k)$, on peut comme avant considérer une base $(f_{-1}, f_0, \dots, f_k)$ orthonormale pour la restriction de $q^{2,n+1}$ à E . Alors, la même preuve que celle de la proposition 40 garantit que $\pi_{n+2}(E \cap \mathcal{C})$ est difféomorphe à la variété d'Einstein Ein_k de dimension k .
- Dans le cas où E est un sous-espace vectoriel de dimension $k+2$ où $0 \leq k \leq n$ tel que la restriction de $q^{2,n+1}$ à E est dégénérée de rang k avec signature $(0, k)$, on considère une base $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{k+1})$ de E pour laquelle

$$x = \sum_{i=-1}^k x_i f_i \implies q^{2,n+1}|_E(x) = \sum_{i=0}^k x_i^2.$$

Alors un vecteur générique x de $\mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\}$ qui appartient à $E \cap \mathcal{C}$ s'écrit $\sum_{i=-1}^k x_i f_i$ et vérifie $\sum_{i=0}^k x_i^2 = 0$, c'est-à-dire $x_1 = \dots = x_k = 0$.

Autrement dit, $\pi_{n+2}(E \cap \mathcal{C}) = \{\pi_{n+2}(x_{-1}f_{-1} + x_0f_0) \mid (x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ s'identifie à $\mathbb{R}P^1$ (ou encore à S^1) ; il s'agit en outre d'une géodésique de lumière puisque $\pi_{n+2}(E \cap \mathcal{C})$ est exactement l'image du 2-plan totalement isotrope $\text{Vect}(f_{-1}, f_0)$.

Une vision plus algébrique de $T^+\text{Ein}_{n+1}$. Le propos est ici de décrire d'une autre manière la sous-variété du fibré cotangent de la variété d'Einstein constituée des covecteurs non-nuls.¹⁶

Si $X = (X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n+1})$ et $Y = (Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+1})$ désignent des vecteurs de $\mathbb{R}^{2,n+1}$, on note $(Y \wedge X)_{i,j} := Y_i X_j - X_i Y_j$ (pour $-1 \leq i < j \leq n+1$ et $Y \wedge X$ l'élément de $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,n+1}$ identifié avec le vecteur de composantes $(Y \wedge X)_{i,j}$). On dit que $Y \wedge X$ est un bivecteur simple.

On pose $\mathcal{S} := \{Y \wedge X \mid X, Y \neq 0 \text{ et } q^{2,n+1}(X, X)q^{2,n+1}(Y, Y) - q^{2,n+1}(X, Y)^2 = 0\}$. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit sur $(\mathbb{R}^{2,n+1})^2$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (X, Y) = (aX + bY, cX + dY)$.

Lemme 9 *La variété \mathcal{S} est difféomorphe à $\frac{\{(X, Y) \in (\mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\})^2 \mid q^{2,n+1}(X, X)q^{2,n+1}(Y, Y) - q^{2,n+1}(X, Y)^2 = 0\}}{SL(2, \mathbb{R})}$.*

En particulier, \mathcal{S} est une variété de dimension $2(n+1)$.

Proposition 41 *La variété \mathcal{S} est difféomorphe à $T^+\text{Ein}_{n+1}$.*

Démonstration

L'idée de la démonstration se fonde sur le lemme 9 et sur le fait que, d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, toute matrice de $SL(2, \mathbb{R})$ peut s'écrire comme le produit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mu, \theta \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la décomposition classique d'Iwasawa.

Si l'on se donne un couple $(X, Y) \in (\mathbb{R}^{2,n+1})^2$ tel que $q^{2,n+1}(X, X)q^{2,n+1}(Y, Y) - q^{2,n+1}(X, Y)^2 = 0$, alors, modulo $SL(2, \mathbb{R})$, on peut supposer que $q^{2,n+1}(X, X) = 0$ ou $q^{2,n+1}(Y, Y) = 0$ (disons $q^{2,n+1}(X, X) = 0$ et alors $q^{2,n+1}(X, Y) = 0$). Si ce n'est pas le cas, on a en effet nécessairement $q^{2,n+1}(X, X) \neq 0$ et $q^{2,n+1}(Y, Y) \neq 0$; dans ce cas, $q^{2,n+1}(X, X)$ et $q^{2,n+1}(Y, Y)$ sont

de même signe car on doit avoir $q^{2,n+1}(X, X)q^{2,n+1}(Y, Y) - q^{2,n+1}(X, Y)^2 = 0$. L'élément $(X', Y') := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

qui est dans la même classe d'équivalence que (X, Y) vérifie

$$\begin{cases} q^{2,n+1}(X') = q^{2,n+1}(Y) \left(\sqrt{\frac{q^{2,n+1}(X)}{q^{2,n+1}(Y)}} \cos \theta \pm \sin \theta \right)^2 \\ q^{2,n+1}(X', Y') = \frac{1}{2} \left((q^{2,n+1}(X) - q^{2,n+1}(Y))^2 \sin(2\theta) + q^{2,n+1}(X, Y) \cos(2\theta) \right), \end{cases}$$

le signe \pm dépendant du signe de $q^{2,n+1}(X, Y)$ (qui est bien sûr déterminé uniquement). Soit alors θ tel que $\tan \theta = \mp \sqrt{\frac{q^{2,n+1}(X)}{q^{2,n+1}(Y)}}$ (le signe de $\tan \theta$ est déterminé uniquement mais θ est défini modulo π). On obtient deux couples (X', Y') (en fait opposés l'un par rapport à l'autre) qui conviennent.

Ensuite, une fois fixé un couple (X, Y) tel que $q^{2,n+1}(X, X) = 0$ et $q^{2,n+1}(X, Y) = 0$, on peut trouver en choisissant de bons λ et μ un représentant de la classe d'équivalence de (X, Y) , noté (X', Y') tel que $X'_- \in S^1, X'_+ \in S^n$ et $Y'_- \in T_{X'_-}^* S^1, Y'_+ \in T_{X'_+}^* S^n$ avec la décomposition $X' = (X'_-, X'_+)$ et $Y' = (Y'_-, Y'_+)$ comme plus haut.

De cela, il résulte que l'on peut associer à chaque élément de \mathcal{S} deux éléments opposés de $T^+(S^1 \times S^n)$, ou encore un élément unique de $T^+\text{Ein}_{n+1}$ (car $\text{Ein}_{n+1} = \frac{S^1 \times S^n}{\mathbb{Z}/2}$).

Inversement, à chaque élément de $T^+(S^1 \times S^n)$ correspond (X, Y) tel que $q^{2,n+1}(X, X) = 0$ et $q^{2,n+1}(X, Y) = 0$ et donc un unique élément de \mathcal{S} . ■

Géométrie conforme de la variété d'Einstein.

Proposition 42 *La variété d'Einstein est munie d'une classe conforme de métriques lorentziennes.*

Démonstration

Notons \mathcal{K} le cône isotrope de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ pour la forme quadratique $q^{2,n+1}$.

L'espace tangent à $x \neq 0$ de \mathcal{K} est l'orthogonal de $\text{Vect}(x)$ pour $q^{2,n+1}$. Si $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, on a $\text{Ker}(q_{T_x \mathcal{K}}^{2,n+1}) = \text{Vect}(x)$ et aussi $\text{Ker}(D_x \pi_{n+2}) = \text{Vect}(x)$.

Cela implique que l'on définit bien une forme bilinéaire symétrique $Q_{\pi_{n+2}(x)}$ sur $T_{\pi_{n+2}(x)} \text{Ein}_{n+1}$ par l'expression

$$\forall y, z \in T_x \mathcal{K}, Q_{\pi_{n+2}(x)}(D_x \pi_{n+2}(y), D_x \pi_{n+2}(z)) := q_x^{2,n+1}(y, z).$$

¹⁶. Nous n'utiliserons pas cette description dans la suite.

De plus $Q_{\pi_{n+2}(x)}$ est lorentzienne puisque $q_{T_x \mathcal{K}}^{2,n+1}$ l'est.

Pour $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, on définit $\tilde{\mathcal{K}}_x$ comme étant le cône isotrope de $q_{T_x \mathcal{K}}^{2,n+1}$; autrement dit,

$$\tilde{\mathcal{K}}_x = \{y \in \mathbb{R}^{2,n+1} \mid y \in T_x \mathcal{K} \text{ et } q^{2,n+1}(y) = 0\}.$$

Il est immédiat de constater que $y \in D_x \pi_{n+2}(\tilde{\mathcal{K}}_x)$ si et seulement si $Q_{\pi_{n+2}(x)}(y) = 0$.

Cela permet alors de définir une distribution lisse \mathcal{D} sur la variété d'Einstein, qui à tout $\pi_{n+2}(x) \in \text{Ein}_{n+1}$ associe $D_x \pi_{n+2}(\tilde{\mathcal{K}}_x) = \{Q_{\pi_{n+2}(x)} = 0\} \in T_{\pi_{n+2}(x)} \text{Ein}_{n+1}$.

Ainsi, on a défini une distribution lisse de cônes tangents lorentziens sur Ein_{n+1} , soit encore une classe conforme de métriques lorentziennes¹⁷ (celle associée à Q). ■

Notation

Dans la suite, on notera $g_{\text{Ein}_{n+1}}$ la métrique Q de la démonstration précédente de sorte que $\pi_{n+2}^* g_{\text{Ein}_{n+1}} = q^{2,n+1}$. □

Remarque

Par construction de $g_{\text{Ein}_{n+1}}$, $O(2, n+1)$ agit conformément sur Ein_{n+1} . □

On énonce sans preuve le résultat suivant qui complète la remarque précédente.

THÉORÈME 6.1 —

Le groupe des difféomorphismes conformes de la variété d'Einstein Ein_{n+1} coïncide avec $O(2, n+1)$.

Le groupe de Lie $O(2, n+1)$ agit transitivement sur $\{x \in \mathbb{R}^{2,n+1} \setminus \{0\} \mid q^{2,n+1} = 0\}$ (c'est une conséquence du théorème de Witt), donc aussi sur Ein_{n+1} par passage au quotient si bien que l'on peut identifier Ein_{n+1} à un espace homogène sous l'action de $O(2, n+1)$.

Définition On appelle géodésique de lumière de Ein_{n+1} l'image par π_{n+2} d'un plan de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ constitué de vecteurs isotropes pour $q^{2,n+1}$.

Remarques

- Cette définition coïncide avec celle donnée dans le cadre plus général des variétés pseudo-riemanniennes strictes au paragraphe 1.6, à ceci près qu'il n'y a pas de paramétrage privilégié dans le cas présent.
- De plus, les géodésiques de lumières de Ein_{n+1} sont topologiquement des cercles. □

Définition Soit p un point de Ein_{n+1} . On appelle cône de lumière de sommet p l'ensemble des géodésiques de lumière qui contiennent p . On note ce cône $\mathcal{C}(p)$.

Proposition 43 *La variété d'Einstein Ein_{n+1} est la compactification conforme de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$.¹⁸ Plus précisément, si p désigne un point de Ein_{n+1} , alors le complémentaire du cône de lumière $\mathcal{C}(p)$ dans Ein_{n+1} est un ouvert conformément équivalent à $\mathbb{R}^{1,n}$.*

Démonstration

Pour démontrer cette proposition, on se place dans la base $(e'_{-1}, \dots, e'_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{2,n+1}$ dans laquelle la forme quadratique $q^{2,n}$ s'écrit $q^{2,n+1}(x) = -2x_{-1}x_{n+1} - 2x_0x_n + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$.

Comme la variété d'Einstein est un espace homogène sous l'action de $O(2, n+1)$, il suffit de montrer la proposition pour $p = \pi_{n+2}(e'_{-1})$.

On voit alors $\mathbb{R}^{1,n}$ comme $(\text{Vect}(e'_0, \dots, e'_n), \tilde{q}^{1,n} := q_{\text{Vect}(e'_0, \dots, e'_n)}^{2,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{2,n+1}$.

On pose alors

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathbb{R}^{1,n} &\longrightarrow & \{y \in \mathbb{R}^{2,n+1} \mid q^{2,n+1}(y) = 0\} \\ x &&\longmapsto & \frac{1}{2} \tilde{q}^{1,n}(x) e'_{-1} + x + e'_{n+1}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'application $\sigma := \pi_{n+2} \circ \sigma$ est un difféomorphisme conforme sur son image. Or, les seuls points qui ne sont pas dans l'image de σ sont les projetés dans Ein_{n+1} de l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$, c'est-à-dire le cône de lumière $\mathcal{C}(\pi_{n+2}(e'_{-1}))$. ■

Remarque

Reformulant la proposition précédente, Ein_{n+1} est encore obtenue en rajoutant un cône de lumière à l'"infini" dans $\mathbb{R}^{1,n}$, que l'on notera $\mathcal{C}(\infty)$ dans la suite. □

17. Cette classe conforme s'appelle classe conforme canonique de Ein_{n+1} .

18. On rappelle que l'on entend par espace de Minkowski de dimension $n+1$, noté $\mathbb{R}^{1,n}$, l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme quadratique lorentzienne (de signature $(1, n)$) $q^{1,n}$.

En plus, on a le théorème suivant, qui est d'un intérêt propre pour la géométrie lorentzienne.

THÉORÈME 6.2 —

Le groupe des difféomorphismes conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{R}^* \times O(1, n)) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration

Reprenons l'application $\sigma : \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \text{Ein}_{n+1}$ de la démonstration précédente qui est un difféomorphisme sur son image.

Toute transformation conforme de l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ correspond donc à une transformation conforme de Ein_{n+1} qui stabilise $p = \pi_{n+2}(e'_{-1})$.

On sait que le groupe des difféomorphismes conformes de Ein_{n+1} est $O(2, n+1)$ et qu'une matrice du stabilisateur de $p = \pi_{n+2}(e'_{-1})$ pour l'action de $O(2, n+1)$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & {}^t v & c \\ 0 & A & u \\ 0 & {}^t w & d \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $u, v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ et vérifie

$${}^t M \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & B & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & B & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, un calcul élémentaire montre que

$$\text{Stab}_{O(2, n+1)}(\pi_{n+1}(e'_{-1})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a {}^t u B A & \frac{a}{2} \tilde{q}^{1, n}(u) \\ 0 & A & u \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*, A \in O(1, n), u \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Via ce qui précède, il devient clair que si $g \in \text{Stab}_{O(2, n+1)}(\pi_{n+1}(e'_{-1}))$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{1, n}$, $g \cdot \sigma(x) = \sigma(aAx + au)$. D'où le théorème. \blacksquare

6.1.2 Action de $O(2, n+1)$ sur un espace de feuilles construit à partir de la variété d'Einstein.

L'action de $O(2, n+1)$ sur Ein_{n+1} induit naturellement une action symplectique de $SO_0(2, n+1)$ sur le fibré cotangent $T^*\text{Ein}_{n+1}$ (muni évidemment de sa forme symplectique canonique ω).

Cette action préserve l'hypersurface de $T^*\text{Ein}_{n+1}$ définie par

$$T_0^+ \text{Ein}_{n+1} := \{(x, \beta) \in T^*\text{Ein}_{n+1} \mid \beta \neq 0 \text{ et } g_{\text{Ein}_{n+1} x}^*(\beta, \beta) = 0\}$$

(qui est constituée des covecteurs isotropes non-nuls).

Comme on l'a remarqué au paragraphe 1.1.3, cette hypersurface possède un feuilletage caractéristique \mathcal{F} . De plus, le groupe $O(2, n+1)$ préserve ce feuilletage caractéristique car il agit symplectiquement.

Or, comme on l'a vu à la proposition 16, chaque feuille du feuilletage caractéristique coïncide avec une orbite du champ de vecteurs géodésique de lumière défini à partir de la métrique lorentzienne $g_{\text{Ein}_{n+1}}$. Mais chacune de ces orbites est topologiquement un cercle, en particulier fermée et périodique. Ainsi, le quotient $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ (qui est l'espace des feuilles) est ici muni d'une structure de variété. De ce qui précède, on déduit que l'action du groupe de Lie $O(2, n+1)$ sur $T_0^+ \text{Ein}_{n+1}$ passe au quotient en une action lisse de $O(2, n+1)$ sur $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$.

En outre, il relève du théorème 1.1 que le quotient est muni d'une structure symplectique : notant $\tau : T_0^+ \text{Ein}_{n+1} \rightarrow \frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ la submersion surjective canonique, l'égalité $\tau^* \tilde{\omega} = \omega|_{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}$ définit une 2-forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$.

À partir de l'égalité qui sert à définir $\tilde{\omega}$, une simple vérification formelle permet finalement d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 44 *Le groupe de Lie $O(2, n+1)$ opère sur l'espace des feuilles caractéristiques $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ par symplectomorphismes.*

Le paragraphe qui suit montre que l'espace des feuilles caractéristiques considéré est symplectomorphe à la variété de Kepler $T^+ S^n$.

6.1.3 L'espace des feuilles comme espace homogène sous l'action de $O(1, n+1)$.

On se donne l'hyperplan vectoriel $\mathcal{H} := \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{2, n+1}$ de signature $(1, n+1)$. D'après ce qu'on a vu plus haut, $\pi_{n+2}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C})$ est un sous-ensemble de Ein_{n+1} qui s'identifie à S^n . On considère alors l'hypersurface de $T_0^+ \text{Ein}_{n+1}$

$$N := \{(x, \beta) \in T_0^+ \text{Ein}_{n+1} \mid x \in \pi_{n+2}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C})\}$$

qui est une transversale totale aux orbites du flot géodésique de lumière ; autrement dit, N intersecte chaque feuille caractéristique une et une seule fois. La projection canonique $\tau : T_0^+ \text{Ein}_{n+1} \rightarrow \frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ induit donc par restriction un difféomorphisme de N sur $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$.

Maintenant, l'action de $O(2, n+1)$ sur $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ considérée précédemment induit une action de $O(1, n+1)$ sur $\frac{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}{\mathcal{F}}$ (après avoir identifié $O(1, n+1)$ au sous-groupe de $O(2, n+1)$ qui fixe le vecteur de base e_{-1}) et donc aussi sur N via le difféomorphisme $(\tau|_N)^{-1}$. Cette dernière action est transitive.

Par ailleurs, on a une action conforme de $O(1, n+1)$ sur S^n donnée par $M \cdot x := pr(Mx)$ où x est un point de l'intersection du cône isotrope de $q^{1, n+1}$ dans $\mathbb{R}^{1, n+1} = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n+1})$ avec la sphère euclidienne de dimension $n+1$ et de rayon $\sqrt{2}$ (cette intersection s'identifie à S^n et $q_{S^n}^{1, n+1}$ est la métrique ronde standard g_{S^n} sur S^n) et où pr désigne la projection qui à tout point (différent de l'origine) du cône isotrope $\{q^{1, n+1} = 0\}$ associe l'intersection de S^n avec la droite passant par ce point et l'origine. Cette action induit une action de $O(1, n+1)$ sur $T^+ S^n$ qui est transitive.

Le stabilisateur S du point $p_1 := (\pi_{n+2}(e_0 + e_1), \beta_0)$ de N pour l'action de $O(1, n+1)$ sur N est égal au stabilisateur du point $p_2 := (e_0 + e_1, \alpha_0)$ de $T^+ S^n$ pour l'action de $O(1, n+1)$ sur $T^+ S^n$ si l'on prend :

- pour β_0 l'image de $D_{e_0+e_1} \pi_{n+2}(e_0+e_1)$ par l'isomorphisme canonique $T_{\pi_{n+2}(e_0+e_1)} \text{Ein}_{n+1} \rightarrow (T_{\pi_{n+2}(e_0+e_1)} \text{Ein}_{n+1})^*$ donné par la forme non-dégénérée $g_{\text{Ein}_{n+2} \pi_{n+2}(e_0+e_1)}$.
- pour α_0 l'image de $D_{e_0+e_1} pr(e_0 + e_1)$ par l'isomorphisme canonique $T_{e_0+e_1} S^n \rightarrow (T_{e_0+e_1} S^n)^*$ donné par la forme non-dégénérée $g_{S^n e_0+e_1}$.

Notant η la submersion surjective canonique de $O(1, n+1)$ sur $O(1, n+1)/S$, on a ainsi deux difféomorphismes $O(1, n+1)$ -équivariants donnés par :

$$\begin{aligned} \Psi : O(1, n+1)/S &\longrightarrow N & \text{et} & & \Phi : O(1, n+1)/S &\longrightarrow T^+ S^n \\ \eta(M) &\longmapsto M \cdot p_1 & & & \eta(M) &\longmapsto M \cdot p_2. \end{aligned}$$

On note enfin λ la 1-forme de Liouville sur $T^* \text{Ein}_{n+1}$ (à partir de laquelle est définie la forme symplectique ω) et θ la 1-forme de Liouville sur $T^* S^n$ qui induit une forme symplectique Ω sur $T^+ S^n$.

Proposition 45 *Le difféomorphisme $(T_0^+ \text{Ein}_{n+1}/\mathcal{F}, \tilde{\omega}) \rightarrow (T^+ S^n, \Omega)$ obtenu via la composition $\Phi \circ \Psi^{-1} \circ (\tau|_N)^{-1}$ est symplectique.*

Démonstration

Puisque $\tau^* \tilde{\omega} = \omega|_{T_0^+ \text{Ein}_{n+1}}$ et $D_{(x, \beta)}(\lambda|_N) = D_{(x, \beta)} \lambda|_{T_{(x, \beta)} N}$, il suffit de montrer que $\Psi^*(\lambda|_N) = \Phi^* \theta$.

Or, d'une part,

$$\Psi^*(\lambda|_N)_{\eta(M)}(D_M \eta(A)) = \beta_0(D_M f(A))$$

avec

$$\begin{aligned} f : O(1, n+1) &\longrightarrow \text{Ein}_{n+1} \\ N &\longmapsto \pi_{n+2}(M^{-1}N(e_0 + e_1)) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \Psi^*(\lambda|_N)_{\eta(M)}(D_M \eta(A)) &= g_{\text{Ein}_{n+1} \pi_{n+2}(e_0+e_1)}(D_{e_0+e_1} \pi_{n+2}(e_0 + e_1), D_{e_0+e_1} \pi_{n+2}(M^{-1}A(e_0 + e_1))) \\ &= q_{e_0+e_1}^{2, n+1}(e_0 + e_1, M^{-1}A(e_0 + e_1)) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\Phi^*(\theta)_{\eta(M)}(D_M \eta(A)) = \alpha_0(D_M g(A))$$

avec

$$\begin{aligned} g : O(1, n+1) &\longrightarrow S^n \\ N &\longmapsto pr(M^{-1}N(e_0 + e_1)) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\Phi^*(\theta)_{\eta(M)}(D_M\eta(A)) &= gS^n_{e_0+e_1}(D_{e_0+e_1}pr(e_0+e_1), D_{e_0+e_1}pr(M^{-1}A(e_0+e_1))) \\ &= \frac{1}{\mu^2(e_0+e_1)}gS^n_{e_0+e_1}(e_0+e_1, M^{-1}A(e_0+e_1)) \\ &= q^{2,n+1}_{e_0+e_1}(e_0+e_1, M^{-1}A(e_0+e_1)),\end{aligned}$$

où $\mu(y)$ est défini par $y = \mu(y)pr(y)$ pour tout y appartenant au cône isotrope $\{q^{1,n+1} = 0\}$ privé de 0 ($\mu(e_0+e_1) = 1$). ■

Remarque

Faisons une remarque fondamentale qui donne une alternative à la preuve directe précédente du fait que T^+S^n est symplectomorphe à l'espace des feuilles caractéristiques $\frac{T_0^+Ein_{n+1}}{\mathcal{F}}$.

On peut montrer que S est conjugué à $O(n-1) \times \mathbb{R}^n$ et identifier l'espace homogène $O(1, n+1)/(O(n-1) \times \mathbb{R}^n)$ (difféomorphe à T^+S^n d'après ce qu'on a vu plus haut) à une orbite coadjointe pour l'action de $O(1, n+1)$ sur $\mathfrak{o}(1, n+1)^*$. De plus, $\mathfrak{o}(1, n+1)$ est une algèbre de Lie simple (*a fortiori* semi-simple) et l'action adjointe de $Lie(O(n-1) \times \mathbb{R}^n)$ sur $\mathfrak{o}(1, n+1)$ ne fixe qu'une seule droite de sorte que d'après la proposition 22, la structure symplectique sur $O(1, n+1)/(O(n-1) \times \mathbb{R}^n)$ et donc sur T^+S^n est unique. En particulier, le difféomorphisme composé de la proposition 45 est nécessairement symplectique.

Notons que pour montrer que $O(1, n+1)/(O(n-1) \times \mathbb{R}^n)$ s'identifie bien à une orbite coadjointe, il suffit de voir que $O(1, n+1)/(O(n-1) \times \mathbb{R}^n)$ s'identifie à une orbite sous l'action adjointe de $O(1, n+1)$ sur son algèbre de Lie; en effet, la forme de Killing sur $\mathfrak{o}(1, n+1)$ non-dégénérée induit un isomorphisme naturel entre $\mathfrak{o}(1, n+1)$ et $\mathfrak{o}(1, n+1)^*$ qui est $O(1, n+1)$ -équivariant.

Autrement dit, il suffit de trouver $X \in \mathfrak{o}(1, n+1)$ tel que $O(n-1) \times \mathbb{R}^n$ soit le stabilisateur de X dans $O(1, n+1)$ pour l'action adjointe.

En pratique, on cherche $X \in \mathfrak{o}(1, n+1)$ tel que $\forall \xi \in \mathfrak{o}(1, n+1), [\xi, X] = 0$. On vérifie ensuite que X est déterminé à facteur multiplicatif (non-nul) près. Pour cela, il est convenable d'utiliser une décomposition de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{o}(1, n+1)$ en espaces de racines.

Cette remarque aura permis notamment d'obtenir le résultat suivant, tout à fait remarquable.

Proposition 46 *Toute forme symplectique sur T^+S^n invariante sous l'action de $O(1, n+1)$ considérée est proportionnelle à la forme symplectique canonique.*

6.2 Précision sur les groupes de symétries du problème de Kepler régularisé.

D'après les régularisations de Moser et Ligon-Schaaf, le système hamiltonien qui régularise le problème de Kepler correspond à la variété symplectique T^+S^n munie du hamiltonien géodésique G (pour la métrique ronde sur S^n).

Il découle des paragraphes qui précèdent que le groupe de Lie $O(2, n+1)$ agit de façon symplectique sur T^+S^n (et même hamiltonienne car T^+S^n est simplement connexe pour $n \geq 2$).

Le groupe de Lie $SO(2) \times O(n+1)$ s'identifie à un sous-groupe de $O(2, n+1)$ donné par

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, A \in SO(2) \text{ et } B \in O(n+1) \right\}.$$

On identifie exactement de la même manière les groupes de Lie $SO(2)$, $O(2)$ et $O(n+1)$ à des sous-groupes de $O(2, n+1)$.

Proposition 47 *Le groupe $SO(2)$ agit sur T^+S^n comme le flot géodésique.*

Lemme 10 *Le centralisateur de $SO(2)$ dans $O(2, n+1)$ est $O(2) \times O(n+1)$.*

Démonstration

Si un élément g de $O(2, n+1)$ centralise $SO(2)$, alors g stabilise l'ensemble des points fixes de $SO(2)$ pour son action naturelle sur $\mathbb{R}^{2,n+1}$ induite par l'identification de $SO(2)$ à un sous-groupe de $O(2, n+1)$ donnée plus haut. Or cet ensemble de points fixes est $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$. Alors g stabilise aussi l'orthogonal de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$ pour $q^{2,n+1}$, à savoir $\text{Vect}(e_{-1}, e_0)$. D'où g est un élément de $O(2) \times O(n+1)$. Réciproquement, on vérifie que chaque élément de $O(2) \times O(n+1)$ commute avec tous les éléments de $SO(2)$.

Cela permet finalement d'obtenir la proposition qui suit.

Proposition 48 *Toute symétrie du système hamiltonien (T^+S^n, Ω, G) qui agit comme un élément de $O(2, n+1)$ sur T^+S^n s'identifie à une transformation appartenant à $O(2) \times O(n+1)$.*

Démonstration

Soit $s : T^+S^n \rightarrow T^+S^n$ une symétrie du système hamiltonien (T^+S^n, Ω, G) . En particulier, $s^*X_G = X_G$, donc s commute avec le flot de X_G ; pour justifier cette dernière affirmation, il suffit de constater que les deux groupes à un paramètre $t \mapsto s \circ \phi_{X_G}^t \circ s^{-1}$ et $t \mapsto \phi_{X_G}^t$ coïncident en $t = 0$ et ont même dérivée à l'origine.

La proposition 47 implique que s commute avec l'action de $SO(2)$. Mais par hypothèse, s agit comme un élément de $O(2, n+1)$ sur T^+S^n , donc ce dernier doit commuter avec tout élément de $SO(2)$, autrement dit doit appartenir au centralisateur de $SO(2)$ dans $O(2, n+1)$, qui est justement $O(2) \times O(n+1)$ d'après le lemme précédent. ■

Remarque

D'après les résultats obtenus dans le chapitre 5, le groupe de Lie $SO(n+1)$ (que l'on peut plonger dans $O(2, n+1)$) est un groupe de symétries connexe du problème de Kepler régularisé (T^+S^n, Ω, G) ; ses éléments s'identifient à des éléments de $O(2) \times O(n+1)$ et agissent comme eux sur T^+S^n . □

6.3 Une autre réduction symplectique, particulière à la variété de Kepler T^+S^3 .

On traite ici le cas du problème de Kepler régularisé correspondant à la dimension $n = 3$.

On va montrer que l'on peut réaliser (indépendamment de ce qu'on a vu dans les sous-parties précédentes) T^+S^3 comme un quotient de Marsden-Weinstein (à symplectomorphisme près) et montrer comment l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(2, 4) = \mathfrak{su}(2, 2)$ du groupe de Lie $O(2, 4)$ intervient pour cela.

Notation

Dans tout ce paragraphe, on désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^2 , que l'on supposera semi-linéaire à gauche et linéaire à droite. La norme hermitienne associée à ce produit scalaire sera notée $\|\cdot\|$.

Un vecteur générique de \mathbb{C}^4 sera noté (w, z) , où $w, z \in \mathbb{C}^2$.

Pour tout nombre complexe z , on notera enfin $\operatorname{Re} z$ sa partie réelle et $\operatorname{Im} z$ sa partie imaginaire. □

6.3.1 Introduction d'une variété symplectique réduite.

On définit l'application :

$$Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (w, z) & \longmapsto & \operatorname{Re}\langle w, z \rangle \end{array}$$

On voit aisément que l'application

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((w_1, z_1), (w_2, z_2)) & \longmapsto & \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\langle w_1, z_2 \rangle + \langle w_2, z_1 \rangle) \end{array}$$

est une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique sur \mathbb{C}^4 qui vérifie

$$\forall (w, z) \in \mathbb{C}^4, \quad b((w, z), (w, z)) = Q(w, z).$$

Il en résulte que l'application Q est une forme quadratique sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 .

Lemme 11 *La forme bilinéaire symétrique b est non-dégénérée.*

Démonstration

Soit $(w_1, z_1) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$. Prenons alors $(w_2, z_2) := (z_1, w_1)$.

Bien sûr (w_2, z_2) n'est pas le vecteur nul et

$$b((w_1, z_1), (w_2, z_2)) = \frac{1}{2} (\|w_1\|^2 + \|z_1\|^2) \neq 0 \quad \text{car } w_1 \neq 0 \text{ ou } z_1 \neq 0.$$

Dorénavant on considère la restriction de Q à $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ que l'on note encore Q .

Proposition 49 *L'image réciproque $Q^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ de dimension 7.*

Démonstration

L'image réciproque $Q^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ est clairement non-vidée et si $(w, z) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, on a $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^4$,

$$D_{(w,z)}Q(u, v) = 2b((w, z), (u, v)).$$

Or, on a vu que b est non-dégénérée, donc $D_{w,z}Q$ est une forme linéaire non-nulle. Cela montre que Q est une submersion. En particulier, $Q^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$; sa dimension est $2 \times 4 - 1 = 7$. ■

On munit la variété lisse $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ de la structure symplectique associée à la différentielle extérieure de la 1-forme $\alpha := 2\text{Im} \left(\sum_{i=1}^2 \overline{w_i} dz_i \right)$ que l'on notera dans la suite $2\text{Im}\langle w, dz \rangle$ pour alléger l'écriture.

Dans les "coordonnées" (η, ξ) de $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ définies par

$$(\eta, \xi) = \Phi(w, z),$$

où

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \\ (w, z) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(w + z, -w + z) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme lisse d'inverse

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \\ (\eta, \xi) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi, \eta + \xi) \end{aligned} \text{ ,}$$

la 1-forme α s'écrit : $(\Phi^{-1})^*(\alpha) = \text{Im}(\langle \eta, d\eta \rangle - \langle \xi, d\xi \rangle + d\langle \eta, \xi \rangle)$.

Comme les opérations "prendre la différentielle extérieure" et "prendre la partie imaginaire" commutent, $(\Phi^{-1})^*(\alpha)$ est cohomologue à $\hat{\alpha} := \text{Im}(\langle \eta, d\eta \rangle - \langle \xi, d\xi \rangle)$.

Dorénavant, on prendra donc $d\hat{\alpha}$ comme forme symplectique sur $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$.

Dans les coordonnées (η, ξ) , la forme quadratique Q s'écrit

$$\hat{Q}(\eta, \xi) := Q \circ \Phi^{-1}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\|\eta\|^2 - \|\xi\|^2).$$

On fait maintenant agir linéairement le groupe des complexes de module 1, $U(1)$, sur $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ par multiplication à gauche de chacune des composantes.

Proposition 50 *L'action de $U(1)$ sur $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ est hamiltonienne.*

Démonstration

Cette action est bien évidemment lisse et symplectique au vu de l'expression de $d\hat{\alpha}$.

De plus, l'application moment à considérer est à facteur multiplicatif constant près \hat{Q} . ■

L'action de $U(1)$ sur $\hat{Q}^{-1}(\{0\})$ est lisse, libre et propre de sorte que le quotient $\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$ est muni d'une structure de variété lisse (de dimension 6) telle que la surjection canonique $\pi : \hat{Q}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$ soit une submersion lisse.

Il résulte de la proposition 50 et du théorème de Marsden-Weinstein-Meyer que le quotient $\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$ possède une forme symplectique Ω .

6.3.2 L'algèbre de Lie $su(2, 2)$ ou $so(2, 4)$.

On désignera les trois matrices de Pauli par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que ces trois matrices forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

Ces matrices permettent de définir l'application de Hopf suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \eta &\longmapsto (\langle \eta, \sigma_i \eta \rangle)_{1 \leq i \leq 3} \end{aligned}$$

Lemme 12 *L'application π est bien définie et surjective.*

Démonstration

Soit $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$. L'équation $\pi(\eta) = m$ se réécrit :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\overline{\eta_1} \eta_2) = \frac{m_1}{2} \\ \operatorname{Im}(\overline{\eta_1} \eta_2) = \frac{m_2}{2} \\ |\eta_1|^2 - |\eta_2|^2 = m_3 \end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} \overline{\eta_1} \eta_2 = \frac{m_1 + im_2}{2} \\ |\eta_1|^2 - |\eta_2|^2 = m_3 \end{cases}.$$

Ce système montre d'abord que si $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, alors $\eta_1 = \eta_2 = 0$, donc que l'application de Hopf est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Si à présent $m \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, le système précédent devient :

$$\begin{cases} \overline{\eta_1} \eta_2 = \frac{m_1 + im_2}{2} \\ 4|\eta_2|^4 + 4m_3|\eta_2|^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \eta_2 \neq 0$$

ou

$$\begin{cases} \overline{\eta_1} \eta_2 = \frac{m_1 + im_2}{2} \\ 4|\eta_1|^4 - 4m_3|\eta_1|^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \eta_1 \neq 0.$$

Traitons le premier système (cas où $\eta_2 \neq 0$), le deuxième étant analogue. L'équation du second degré en $|\eta_2|^2$ a pour discriminant $16\|m\|^2$, où $\|\cdot\|$ est ici la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 , d'où

$$|\eta_2|^2 = \frac{-m_3 \pm \|m\|}{2}.$$

Il s'agit alors de discuter selon le signe de $-m_3 + \|m\|$ et celui de $-m_3 - \|m\|$, en sachant que les solutions obtenues ont un sens si et seulement si $-m_3 \pm \|m\| \geq 0$.

On a toujours $\|m\| \geq m_3$, donc $|\eta_2| = \sqrt{\frac{-m_3 + \|m\|}{2}}$ est solution. Il existe alors $\zeta \in U(1)$ tel que $\eta_2 = \sqrt{\frac{-m_3 + \|m\|}{2}} \zeta$. On obtient alors $\eta_1 = \frac{m_1 - im_2}{\sqrt{2(\|m\| - m_3)}} \zeta$, ce qui n'est possible que si $\|m\| \neq m_3$, c'est-à-dire $(m_1, m_2, m_3) \notin \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^+$.

Ensuite, si $|\eta_2| = \sqrt{\frac{-m_3 - \|m\|}{2}}$ est solution, on doit avoir $\|m\| \leq -m_3$, donc $(m_1, m_2) = (0, 0)$ et finalement $\eta_2 = 0$, ce qui est exclu. Finalement, après avoir traité le second système (cas où $\eta_1 \neq 0$), on obtient comme ensemble de solutions à l'équation $\pi(\eta) = m$:

$$\left\{ \eta \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \exists \zeta \in U(1), \begin{cases} \eta = \frac{1}{\sqrt{2(\|m\| - m_3)}} (m_1 - im_2, \|m\| - m_3) \zeta & \text{si } m \notin \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}_+ \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2(\|m\| + m_3)}} (\|m\| + m_3, m_1 + im_2) \zeta & \text{si } m \notin \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}_- \end{cases} \right\}.$$

En particulier, cela montre que π est surjective. ■

Faisons maintenant un rappel concernant l'algèbre de Lie de $SU(2, 2)$. Il s'agit de $\mathfrak{su}(2, 2) = \{M \in M(4, \mathbb{C}), {}^t \overline{M} \mathfrak{J} M = \mathfrak{J} \text{ et } \operatorname{tr}(M) = 0\}$ où

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une base de cet espace est donnée par les matrices

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{M}_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{M}_3 = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & O_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{N}_1 &= \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix}; \mathfrak{N}_2 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{N}_3 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -\sigma_3 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{Q}_0 &= \begin{pmatrix} O_2 & iI_2 \\ iI_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{Q}_1 = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{Q}_2 = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{Q}_3 = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & O_2 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{P}_0 &= \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} O_2 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{P}_2 = \begin{pmatrix} O_2 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & O_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{P}_3 = \begin{pmatrix} O_2 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & O_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où on note O_2 et I_2 les matrices nulle et identité de taille 2×2 .

6.3.3 La variété de Kepler T^+S^3 comme variété symplectique réduite.

Notation

Comme souvent, on identifie T^+S^3 à $\{(x, p) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1, p \neq 0, \langle x, p \rangle = 0\}$, où ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien standard sur \mathbb{R}^4 .

On note θ la 1-forme différentielle sur T^+S^3 induite par la 1-forme de Liouville sur T^*S^3 .

L'intérêt de ce paragraphe est la construction d'une application $\hat{\varphi} : \hat{Q}^{-1}(\{0\}) \rightarrow T^+S^3$ qui induira un symplectomorphisme de $\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$ sur T^+S^3 .

On commence par définir pour tout $\mathfrak{A} \in \mathfrak{su}(2, 2)$ la fonction suivante définie sur $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$:

$$\psi_{\mathfrak{A}} : (\eta, \xi) \mapsto \overline{(\eta, \xi)} \mathfrak{J} \mathfrak{A} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

ainsi que les fonctions

$$\begin{aligned}J &:= \psi_{\frac{1}{2}\mathfrak{J}} \\ M_i &:= \psi_{\mathfrak{M}_i}, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ N_i &:= \psi_{\mathfrak{N}_i}, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ Q_0 &:= \psi_{\mathfrak{Q}_0}, Q_i := \psi_{\mathfrak{Q}_i}, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ P_0 &:= \psi_{\mathfrak{P}_0}, P_i := \psi_{\mathfrak{P}_i}, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket\end{aligned}$$

à partir des éléments de $\mathfrak{su}(2, 2)$ définis au paragraphe précédent.

Les expressions explicites sont indiquées dans la proposition suivante.

Proposition 51

$$\begin{aligned}J(\eta, \xi) &= \frac{1}{2}(\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ M_i(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2}\langle \eta, \sigma_i \eta \rangle, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ N_i(\eta, \xi) &= \frac{1}{2}\langle \xi, \sigma_i \xi \rangle, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ Q_0(\eta, \xi) &= -\text{Im}\langle \eta, \xi \rangle, Q_i(\eta, \xi) = \text{Re}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ P_0(\eta, \xi) &= \text{Re}\langle \eta, \xi \rangle, P_i(\eta, \xi) = \text{Im}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle, & \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket\end{aligned}$$

Notation

Si A désigne l'une quelconque des lettres M, N, P, Q utilisées pour définir les fonctions précédentes, on notera \underline{A} la fonction à valeurs vectorielles qui à (η, ξ) associe

$$\begin{pmatrix} A_1(\eta, \xi) \\ A_2(\eta, \xi) \\ A_3(\eta, \xi) \end{pmatrix}.$$

On notera alors \underline{A}^2 la somme $\sum_{i=1}^3 A_i^2$.

Le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 sera noté \times . □

La proposition ci-après donne quelques relations entre \hat{Q} et les fonctions précédentes dont on se servira. On a pour cela besoin du lemme suivant.

Lemme 13 *Si u, w, z sont trois éléments génériques de \mathbb{C}^2 , on a la relation*

$$\sum_{i=1}^3 \operatorname{Re}\langle z, \sigma_i u \rangle \operatorname{Re}\langle z, \sigma_i w \rangle = \|z\|^2 \operatorname{Re}\langle u, w \rangle - \operatorname{Im}\langle z, u \rangle \operatorname{Im}\langle z, w \rangle.$$

Démonstration

On remarque d'abord que pour $u, w, z \in \mathbb{C}^2$,

$$\sum_{i=1}^3 \langle u, \sigma_i z \rangle \sigma_i w = 2\langle u, w \rangle z - \langle u, z \rangle w.$$

Echangeant les rôles de u et z dans l'égalité précédente, on obtient (puisque les matrices de Pauli sont d'ordre 2)

$$\sum_{i=1}^3 \overline{\langle u, \sigma_i z \rangle} \sigma_i w = 2\langle z, w \rangle u - \langle z, u \rangle w.$$

Additionnant les deux égalités, il vient :

$$\sum_{i=1}^3 \operatorname{Re}(\langle u, \sigma_i z \rangle) \sigma_i w = \langle u, w \rangle z + \langle z, w \rangle u - \operatorname{Re}\langle z, u \rangle w.$$

Multipliant à gauche cette dernière égalité par ${}^t \bar{z}$, il vient :

$$\sum_{i=1}^3 \operatorname{Re}(\langle u, \sigma_i z \rangle) \langle z, \sigma_i w \rangle = \langle u, w \rangle \|z\|^2 + \langle z, w \rangle \langle z, u \rangle - \operatorname{Re}\langle z, u \rangle \langle z, w \rangle.$$

Prenant finalement la partie réelle des deux membres de l'égalité précédente et utilisant que $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}z_1 \operatorname{Re}z_2 - \operatorname{Im}z_1 \operatorname{Im}z_2$ pour des nombres complexes z_1, z_2 quelconques, on obtient la formule annoncée. ■

Proposition 52 *On a les relations suivantes.*

1. $\underline{M}^2 = \frac{1}{4}(J + \hat{Q})^2.$
2. $\underline{N}^2 = \frac{1}{4}(J - \hat{Q})^2.$
3. $\sum_{i=0}^3 Q_i^2 = Q_0^2 + \underline{Q}^2 = J^2 - \hat{Q}^2.$
4. $\sum_{i=0}^3 P_i^2 = P_0^2 + \underline{P}^2 = J^2 - \hat{Q}^2.$
5. $-\frac{1}{2}(J + \hat{Q})\underline{Q} = P_0 \underline{M} + \underline{M} \times \underline{P}.$
6. $\frac{1}{2}(J + \hat{Q})\underline{P} = Q_0 \underline{M} + \underline{M} \times \underline{Q}.$
7. $\sum_{i=0}^3 P_i Q_i = 0$ si $J + \hat{Q} \neq 0.$

Démonstration

La démonstration s'appuie essentiellement sur le lemme précédent. ■

Remarque

Le point 3) de la proposition précédente montre en particulier que si $(\eta, \xi) \in \hat{Q}^{-1}(\{0\})$, le vecteur $\frac{1}{J(\eta, \xi)} \begin{pmatrix} Q_0(\eta, \xi) \\ \underline{Q}(\eta, \xi) \end{pmatrix}$ est un élément de S^3 , la sphère unité de \mathbb{R}^4 . □

En outre, les points 3), 4) et 7) garantissent que l'application

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \hat{Q}^{-1}(\{0\}) &\longrightarrow T^+S^3 \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} &\longrightarrow \left(\frac{1}{J(\eta, \xi)} \begin{pmatrix} Q_0(\eta, \xi) \\ \underline{Q}(\eta, \xi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_0(\eta, \xi) \\ \underline{P}(\eta, \xi) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

est bien définie. Elle est aussi bien sûr de classe \mathcal{C}^∞ .

Voici maintenant le théorème qui permet d'identifier T^+S^3 à un quotient de Marsden-Weinstein.

THÉORÈME 6.3 —

Notons $i : \hat{Q}^{-1}(\{0\}) \hookrightarrow \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ l'inclusion.

L'application $\hat{\varphi}$ est surjective et vérifie $\hat{\varphi}^*\theta = i^*\hat{\alpha}$.

En outre, elle induit un symplectomorphisme de $(\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1), \Omega)$ sur $(T^+S^3, d\alpha)$.

Démonstration

Un vecteur générique $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^4 sera noté $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$ par analogie aux notations utilisées plus haut.

On commence par montrer que $\hat{\varphi}$ est surjective.

On définit pour cela les applications

$$\begin{aligned} f : \hat{Q}^{-1}(\{0\}) &\longrightarrow S^3 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (\eta, \xi) &\longmapsto \left(\frac{1}{J(\eta, \xi)} \begin{pmatrix} Q_0(\eta, \xi) \\ \underline{Q}(\eta, \xi) \end{pmatrix}, \eta \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : S^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow T^+S^3 \\ (x, m) &\longmapsto \left(x, \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i m_i \\ -x_0 m + \underline{x} \times m \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui sont bien définies, bijectives, lisses, de bijections réciproques

$$\begin{aligned} \tilde{f} : S^3 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \hat{Q}^{-1}(\{0\}) \\ (x, \eta) &\longmapsto \left(\eta, \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j \eta - i x_0 \eta \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{g} : T^+S^3 &\longrightarrow S^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ (x, p) &\longmapsto (x, p_0 \underline{x} - x_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{m}) \end{aligned}$$

respectivement, également lisses. Les vérifications se font à partir du lemme 13 et de la proposition précédent l'énoncé du théorème.

La composition

$$\hat{Q}^{-1}(\{0\}) \xrightarrow{f} S^3 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{Id \times \pi} S^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \xrightarrow{g} T^+S^3,$$

où l'on aura noté π l'application de Hopf, correspond exactement à l'application $\hat{\varphi}$.

La surjectivité de $\hat{\varphi}$ découle maintenant de ce qui précède et du lemme 12.

Calculons à présent $\hat{\varphi}^*\theta$. On a :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^*\theta &= \frac{1}{\|\eta\|^2} \left[\operatorname{Re}\langle \eta, \xi \rangle d(-\operatorname{Im}\langle \eta, \xi \rangle) + \sum_{i=1}^3 \operatorname{Im}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle d(\operatorname{Re}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\|\eta\|^2} \left[\operatorname{Re}\langle \eta, \xi \rangle (\operatorname{Im}\langle \xi, d\eta \rangle - \operatorname{Im}\langle \eta, d\xi \rangle) + \sum_{i=1}^3 \operatorname{Im}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle (\operatorname{Re}\langle \sigma_i \xi, d\eta \rangle - \operatorname{Re}\langle \eta, \sigma_i d\xi \rangle) \right] \end{aligned}$$

Utilisant maintenant le lemme 13 où l'on remplace u par $-i\xi$, z par η et w par $d\xi$, il vient

$$\sum_{i=1}^3 \operatorname{Im}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle \operatorname{Re}\langle \eta, \sigma_i d\xi \rangle = -\|\eta\|^2 \operatorname{Im}\langle \xi, d\xi \rangle + \operatorname{Re}\langle \eta, \xi \rangle \operatorname{Im}\langle \eta, d\xi \rangle$$

Donc

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^*\theta &= \frac{1}{\|\eta\|^2} \left[-\|\eta\|^2 \operatorname{Im}\langle \xi, d\xi \rangle + \operatorname{Re}\langle \eta, \xi \rangle \operatorname{Im}\langle \xi, d\eta \rangle + \sum_{i=1}^3 \operatorname{Im}\langle \eta, \sigma_i \xi \rangle \operatorname{Re}\langle \sigma_i \xi, d\eta \rangle \right] \\
&= \frac{1}{\|\eta\|^2} \left[-\|\eta\|^2 \operatorname{Im}\langle \xi, d\xi \rangle + \|\xi\|^2 \operatorname{Im}\langle \eta, d\eta \rangle \right] \\
&= \operatorname{Im}\langle \eta, d\eta \rangle - \operatorname{Im}\langle \xi, d\xi \rangle \\
&= \hat{\alpha}|_{\hat{Q}^{-1}(\{0\})} \\
&= i^*\hat{\alpha}
\end{aligned}$$

Ensuite, la démonstration du lemme 12 montre que les images réciproques des points de T^+S^3 par l'application $\hat{\varphi}$ coïncident avec les orbites de l'action de $U(1)$ sur $\hat{Q}^{-1}(\{0\})$.

Notant Π la projection canonique de $\hat{Q}^{-1}(\{0\})$ sur $\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$, on voit ainsi que $\hat{\varphi}$ induit une bijection lisse $\hat{\Phi}$ de $\hat{Q}^{-1}(\{0\})/U(1)$ sur T^+S^3 telle que $\hat{\varphi} = \hat{\Phi} \circ \Pi$.

On avait déjà $\Pi^*\Omega = i^*(d\hat{\alpha})$ et on vient de voir que $\hat{\varphi}^*\theta = i^*\hat{\alpha}$, donc en prenant la différentielle extérieure (qui commute avec le tiré-en-arrière), on a aussi $\Pi^*\hat{\Phi}^*(d\theta) = \hat{\varphi}^*(d\theta) = i^*(d\hat{\alpha})$. Ainsi il résulte :

$$\Pi^*\Omega = \Pi^*\hat{\Phi}^*(d\theta).$$

La surjectivité de Π montre alors que

$$\Omega = \hat{\Phi}^*(d\theta),$$

autrement dit $\hat{\Phi}$ est un symplectomorphisme local. Puisque l'application est aussi bijective, $\hat{\Phi}$ est finalement un symplectomorphisme. ■

Conclusion et Remerciements.

Ce mémoire m'a permis de découvrir une nouvelle branche des mathématiques, à savoir la géométrie symplectique et d'apprendre une partie de la théorie des systèmes dynamiques.

Je tiens à remercier l'encadrant de ce travail, Charles Frances, avec qui j'ai eu l'occasion de m'entretenir de nombreuses fois et qui m'a guidé tout au long de l'année universitaire en me proposant la lecture d'un échantillon large de documents reliés directement au problème de Kepler ou traitant plutôt de concepts géométriques nécessaires pour l'aborder. En outre, j'ai bénéficié d'explications claires, précises et illustrées concernant des notions géométriques sur lesquelles la littérature n'insiste souvent pas.

Références

- [1] Abraham, Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [2] Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, 1974.
- [3] Arnold, Novikov, *Dynamical systems IV*. Encyclopedaia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [4] Audin, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. EDP Sciences, Société Mathématique de France, Cours spécialisés 8, 2001.
- [5] Bolsinov, Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems : Geometry, Topology, Classification*. CRC Press, Chapman and Hall, 2004.
- [6] Chenciner, *Le problème de la Lune et la théorie des systèmes dynamiques*. Première partie des notes du cours de A. Chenciner, Paris VII, 1985-1986.
- [7] Chu, *Symplectic homogeneous spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, volume 197, 1974.
- [8] Cushman, Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [9] Devaney, *Collision Orbits in the Anisotropic Kepler Problem*. Tufts University, *Inventiones mathematicae*, 45, 221-251, 1978.
- [10] Fasso, *Notes of Finite Dimensional Integrable Hamiltonian Systems*. 1999.
- [11] Fasso, *Quasi-periodicity of motions and complete integrability of Hamiltonian systems*, Cambridge University Press, 1998.
- [12] Frances, *Thèse*, extrait du chapitre 4 : "Géométrie de l'univers d'Einstein".
- [13] Geiges, *An introduction to Contact Topology*. Cambridge studies in advanced mathematics, 109, Cambridge University Press, 2008.
- [14] Guillemin, Sternberg, *Variations on a theme by Kepler*. American Mathematical Society, 1990.
- [15] Heckman, de Laat, *On the Regularization of the Kepler Problem*. 2010.
- [16] Katok, Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [17] Ligon, Schaaf, *On the Global Symmetry of the Classical Kepler Problem*. Reports on Mathematical Physics, 1976.
- [18] Moser, *Notes on dynamical Systems*. American Mathematical Society, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2005.
- [19] Milnor, *On the geometry of the Kepler Problem*. Institute for Advanced Study, Princeton NJ, 1983.
- [20] Sternberg, *Symplectic homogeneous spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, volume 212, 1975.