

Rapport de Stage de Mathématiques appliquées

Parcours Magistère de Mathématiques

Xavier FRIEDERICH

Juin 2016

UNE APPROCHE UNIFIEE DE LA CONCURRENCE EN QUANTITE ET EN PRIX DANS LA THEORIE DE L'OLIGOPOLE

Directeur de stage : Bertrand KOEBEL

Enseignant référent : Nicolas JUILLET

Stage effectué au
Bureau d'Economie Théorique et Appliquée
Faculté des Sciences Economiques & de Gestion de Strasbourg



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Sommaire

Remerciements	3
1 Présentation de l'organisme d'accueil.	4
2 Le déroulement de mon stage.	4
2.1 Mon travail et les outils mathématiques utilisés.	4
2.2 Bilan de mon stage.	5

Remerciements.

Je souhaite remercier d'abord toute l'équipe administrative et pédagogique de la Faculté des sciences économiques et de gestion de Strasbourg qui m'a donné la possibilité d'effectuer mon stage dans leur établissement.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à Bertrand Koebel, professeur de sciences économiques spécialisé en économétrie, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt que j'ai vécue durant ce stage, mais aussi pour le temps qu'il a consacré à la lecture et à la correction de mon mémoire.

Enfin, mes remerciements s'adressent également à Nicolas Juillet pour sa disponibilité en tant qu'enseignant référent de l'UFR de Mathématique et Informatique de Strasbourg et notamment pour sa participation au bon encadrement de mon stage.

1 Présentation de l'organisme d'accueil.

J'ai effectué mon stage au Bureau d'Economie Théorique et Avancée (BETA) qui est une unité mixte de recherche de l'Université de Strasbourg, de l'Université de Lorraine et du CNRS.

Bertrand Koebel, qui a été mon maître de stage, est le directeur du BETA. L'unité de recherche est composée d'une centaine de membres permanents (professeurs, directeurs de recherche, maîtres de conférences, chargés de recherche, ingénieurs, techniciens...), d'une cinquantaine de doctorants et aussi d'environ cinquante membres non-permanents (notamment associés ou post-doctorants).

L'activité de recherche est largement diversifiée. Organisé autour des sept thématiques de recherche suivantes :

- routines, communautés, réseau
- comportements et marchés
- fluctuations, croissance et politiques macroéconomiques
- science, technologie, innovation
- économie du travail, formation, emploi et politiques sociales
- économie du droit
- cliométrie et histoire de la pensée économique,

le BETA développe des outils ou approches spécifiques et modernes concernant les aspects fondamentaux mais aussi plus appliqués de la recherche en économie et gestion. En outre, les techniques de modélisation et d'évaluation expérimentale, notamment en économétrie sont à la pointe du développement actuel en économie et gestion.

2 Le déroulement de mon stage.

2.1 Mon travail et les outils mathématiques utilisés.

L'objectif principal de mon stage de mathématiques appliquées aura été de découvrir et étudier les principaux aspects de la théorie des jeux et des équilibres oligopolistiques ; ces thèmes très récents dans la littérature économique sont en plein développement actuellement.

Partant d'un travail bibliographique, le stage s'est poursuivi par la rédaction d'un mémoire d'une quarantaine de pages qui figure directement à la suite de ce présent rapport. Bien souvent, M. Koebel proposait des conjectures (à partir de son expérience d'économètre) que je devais démontrer ou infirmer.

L'utilisation des outils mathématiques aura été omniprésente.

Dans la première partie consacrée à la théorie des jeux, on introduit des concepts mathématiques propres à la logique, à l'analyse réelle, au calcul différentiel et à la topologie. Je propose les démonstrations des principaux résultats à partir de mes connaissances mathématiques acquises au cours du premier cycle universitaire. Plus précisément, on mélange les notions d'ensembles ordonnés, de borne supérieure, de semi-continuité supérieure, de compacité, de dérivées partielles,... En outre, j'ai découvert également la notion de supermodularité et de différences croissantes. Par ailleurs, la notion économique d'équilibre fait manipuler des théorèmes de point fixe ; notamment le théorème de Tarski (qui consiste en un exercice bien connu dans le cas de la dimension 1 pour un étudiant de premier cycle) est énoncé et démontré.

Les deuxième et troisième volets de ma production écrite traitent des équilibres en prix et en quantité ; on est amené à mettre en place une certaine "dualité" entre les concurrences en prix (de type Bertrand) et les concurrences en quantité (de type Cournot). Calculer un équilibre revient ici bien souvent à maximiser les fonctions de profit ; comme pour rechercher les éventuels extrema d'une fonction en calcul différentiel, on est amené à annuler les dérivées partielles des fonctions de profit et à déterminer le signe des dérivées secondes. De plus, on emploie une fois le théorème des fonctions implicites qui constitue un outil à la fois fondamental et incontournable du calcul différentiel de plusieurs variables. Par ailleurs, la comparaison des équilibres en prix et en quantité se fait d'abord dans le cas linéaire avec deux firmes, puis est étendu au cas de N firmes ; l'emploi de l'algèbre linéaire à travers les matrices et les déterminants est ici bienvenu.

J'ai consacré enfin la dernière semaine de mon stage à l'étude théorique et appliquée de l'estimation et de la résolution des systèmes non-linéaires. Le cours de statistique de ce semestre aura été utile pour cela puisque j'ai élaboré deux programmes avec le logiciel R consistant à estimer un exemple de système non-linéaire avec la méthode

de l'estimateur du maximum de vraisemblance et à résoudre des exemples de systèmes non-linéaires avec la méthode de Newton-Raphson.

2.2 Bilan de mon stage.

Le stage que j'ai effectué au BETA a été pour moi une expérience très enrichissante puisqu'il m'a permis d'élargir ma culture scientifique en comprenant comment les outils mathématiques peuvent être utilisés dans le domaine de l'économie. En outre, j'ai su mettre mon savoir-faire mathématique au service de l'économie théorique. Les différentes parties du travail (qui balaient un large éventail de thèmes mathématiques) m'ont justement permis à la fois de consolider et de réinvestir beaucoup de connaissances acquises depuis le début de mes études en mathématiques. De surcroît, ce stage aura été l'occasion de nouer un premier lien avec le monde de la recherche car j'ai avant tout travaillé à partir d'articles et livres issus de la littérature économique mais j'ai également inclus dans mon mémoire des éléments issus de ma propre réflexion. D'ailleurs, durant toute la période de mon stage, j'ai travaillé dans la même salle que certains doctorants (préparant une thèse d'économie), ce qui m'a permis d'échanger avec eux et de leur poser des questions quant à une éventuelle poursuite de mes études en doctorat.

Stage de Mathématiques appliquées effectué au
Bureau d'Economie Théorique et Appliquée

Faculté des Sciences Economiques & de Gestion de Strasbourg

Xavier FRIEDERICH

Juin 2016

**UNE APPROCHE UNIFIEE DE LA
CONCURRENCE EN QUANTITE ET EN
PRIX DANS LA THEORIE DE L'OLIGOPOLE**

Directeur de stage : Bertrand KOEBEL

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Sommaire

Introduction	3
1 Éléments de théorie des jeux	4
1.1 Concepts de stratégie et équilibre.	4
1.2 Notion de différences croissantes	5
1.3 Supermodularité	7
1.3.1 Définitions	7
1.3.2 Existence d'un équilibre	7
1.3.3 Propriétés paramétriques des points d'équilibre	9
2 Concurrence en quantité et en prix - dualité	11
2.1 Quelques définitions	11
2.2 Concurrence en quantité et en prix dans le cas d'un bien homogène	11
2.2.1 Un modèle de concurrence en quantité : l'oligopole de Cournot	11
2.2.2 Un modèle de concurrence en prix : l'oligopole de Bertrand	13
2.3 Quelques exemples de situation de dualité.	15
2.3.1 Dualité entre le duopole et le monopole complémentaire de Cournot, cas de biens parfaitement substituables	15
2.3.2 Biens différenciés complémentaires et substituables, cas de systèmes de demande linéaires.	16
2.4 Condition suffisante d'équivalence des équilibres en quantité et en prix pour un oligopole avec un seul bien, cas de fonctions de demande générales.	23
2.4.1 Cas du duopole	23
2.4.2 Cas de N firmes	26
2.5 Une extension au cas de nombres quelconques de firmes et de biens	27
3 Equilibres oligopolistiques	29
3.1 Equilibres, définitions et caractérisations.	29
3.2 Mise en évidence d'un lien entre les équilibres.	31
4 Estimation de systèmes non-linéaires.	32
4.1 Quelques définitions.	32
4.2 Notations utilisées.	32
4.3 Description des systèmes étudiés.	32
4.4 Estimation des systèmes non-linéaires, méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance.	33
4.4.1 Idée générale de l'estimation.	33
4.4.2 L'estimateur du maximum de vraisemblance.	33
4.4.3 Implémentation avec le logiciel R.	34
4.5 Une méthode classique de résolution des systèmes, la méthode de Newton-Raphson.	34
Conclusion et Remerciements	38
Références	39
Annexe au paragraphe 4 : les fichiers .R	40
4.6 Le fichier EMV.R	40
4.7 Le fichier newton-raphson.R	43

Introduction.

Le présent travail constitue une étude des interactions stratégiques en prix et en quantité dans le cadre d'un oligopole. Le formalisme de la théorie des jeux sert comme support à la comparaison de certaines situations de concurrence en prix avec d'autres en quantité.

Dans le premier chapitre, on introduit des concepts mathématiques généraux et modernes relatifs à la théorie des jeux. Les définitions des jeux stratégiques, des équilibres, de la supermodularité se veulent axiomatiques et sont suivies de propositions et théorèmes importants de la littérature. Les démonstrations des résultats théoriques, assez détaillées, relèvent souvent des compétences mathématiques acquises durant le premier cycle universitaire. En particulier, les énoncés mélangent les notions d'ordre et de borne supérieure, de semi-continuité supérieure, de compacité ou encore de dérivation, propres à la logique, à l'analyse réelle, à la topologie et au calcul différentiel de plusieurs variables.

La deuxième partie expose tout d'abord les situations classiques de concurrence en quantité de Cournot et de concurrence en prix de Bertrand; on montre ensuite dans quelle mesure il est possible de rapprocher ces deux modèles. L'ensemble est d'ailleurs consacré à la recherche et à la mise en évidence d'une certaine dualité entre les deux compétitions en quantité et en prix. Si l'on part fréquemment de situations particulières où les équilibres de Cournot et de Bertrand sont aisément comparables, qu'il s'agisse du cas de deux firmes ou du cas où les fonctions de demande ont une structure linéaire, on parvient néanmoins à observer que sous certaines hypothèses quoique restrictives les systèmes caractérisant les équilibres en prix et en quantité sont équivalents.

Le troisième volet constitue une ouverture à l'étude des équilibres oligopolistiques généraux; cette fois, les entreprises tiennent compte des deux variables stratégiques que sont le prix et la quantité. Cette section est fondée sur une hypothèse de Claude d'Aspremont, Rodolphe Dos Santos Ferreira et Louis-André Gérard-Varet aboutissant à des fonctions de paiement assez particulières. L'étude consiste à proposer et à démontrer une condition nécessaire et suffisante pour obtenir un équilibre oligopolistique. Cela permet de terminer par un résultat permettant d'associer à un équilibre en quantité un équilibre en prix.

Enfin, on s'intéresse dans le dernier chapitre à l'estimation et à la résolution de systèmes généraux (non-linéaires en l'occurrence). On étudie plus particulièrement la méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance (pour l'estimation) et la méthode de Newton-Raphson (pour la résolution). Des exemples concrets sont réalisés avec le logiciel de programmation R.

Dans tout l'exposé, on considère l'ensemble des réels \mathbb{R} muni de la relation d'ordre naturelle et de sa topologie usuelle.

1 Éléments de théorie des jeux

La théorie des jeux étudie l'interaction des individus lors de prises de décision. On donne dans ce paragraphe des outils mathématiques qui permettront d'étudier et de comprendre les comportements économiques. On décrira les jeux via la forme stratégique.¹

1.1 Concepts de stratégie et équilibre.

Définition *Un jeu non-coopératif sous forme stratégique est la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ définissant l'ensemble $N_n := \{1, 2, \dots, n\}$ des joueurs, d'ensembles A_i , pour $1 \leq i \leq n$, appelés espaces des stratégies (ou d'actions) du joueur i , et de fonctions $f_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$, dites fonctions de paiement.*

Notation

- On notera par le triplet (N_n, A_i, f_i) un tel jeu sous forme stratégique.
- Pour tout $i \in N_n$, on notera de manière générique x_i un élément de A_i . On note $A := A_1 \times \dots \times A_n$. Un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in A$ sera noté plus simplement x . Aussi, par simplification d'écriture, on désignera, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $i_1, \dots, i_k \in N_n$, le produit cartésien formé des A_l pour $l \in N_n \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ par $A_{-i_1, -i_2, \dots, -i_k}$. Enfin, x_{-i} sera l'élément $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ de A_{-i} .² □

On suppose que la description d'un jeu, c'est-à-dire la donnée des gains et stratégies possibles des joueurs, est un savoir commun à tous les joueurs et qu'il est connu de tous que chaque joueur choisit une action qui maximise son utilité et son profit compte tenu de ses opinions subjectives.

En tant qu'individu "rationnel", chaque joueur va agir de telle sorte à optimiser son paiement dans une situation où ses gains dépendent des choix des autres individus poursuivant le même but.

Autrement dit, dans le cadre d'un jeu sous forme stratégique (N_n, A_i, f_i) , le joueur i choisit une stratégie qui maximise sa fonction de paiement, en tenant compte des stratégies adoptées par les autres joueurs.³ Cela motive la définition suivante que l'on peut trouver chez Amir ([1]) par exemple.

Définition *On appelle correspondance de meilleure réponse⁴ du joueur i l'application r_i qui à tout vecteur $x_{-i} \in A_{-i}$ associe le sous-ensemble $r_i(x_{-i}) := \arg \max_{x_i \in A_i} f_i(x_i, x_{-i})$ de A_i .*

Remarque

La définition d'un jeu sous forme stratégique donnée plus haut n'exclut pas les cas où $r_i(x_{-i}) = \emptyset$. Dans le cas où la correspondance est définie de manière univoque (autrement dit, lorsque chaque ensemble $r_i(x_{-i})$ est réduit à un élément de A_i lorsque x_{-i} décrit A_{-i}), on parle plutôt de fonction de meilleure réponse. □

On donne aussi la définition suivante que l'on utilisera plus loin et que l'on trouve chez Vives ([13]) ou encore chez Amir ([1]) de façon moins explicitée.

Définition *On appelle correspondance de meilleure réponse cumulée⁵ et on note r l'application qui à tout vecteur $x \in A$ associe le produit cartésien des correspondances de meilleure réponse de chaque joueur i en x_{-i} . En symboles, cela donne :*

$$r : A \rightarrow \mathcal{P}(A) \\ x \mapsto \prod_{i \in N_n} r_i(x_{-i}) .$$

Définition *Soit (N_n, A_i, f_i) un jeu non-coopératif sous forme stratégique et $x \in A$. On dit que x est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu si pour tout joueur i ,*

$$\forall y_i \in A_i, f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}).$$

1. On dit parfois sous forme normale.
2. Cette écriture est bien justifiée car pour toute permutation σ de N_n et tout $k \in N_n$, les produits cartésiens $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_k}$ et $A_{\sigma(i_1)} \times \dots \times A_{\sigma(i_k)}$ sont équipotents. En outre, on conviendra avec les notations introduites que $(x_i, x_{-i}) = x$.
3. Un tel maximum existe par définition ; mais il peut bien évidemment ne pas y avoir unicité.
4. "best-reply correspondence" an anglais.
5. "overall best-reply correspondence" an anglais.

Définition Soient x_i et \tilde{x}_i deux éléments de A_i .

On dit que la stratégie \tilde{x}_i domine faiblement la stratégie x_i si

$$\forall x_{-i} \in A_{-i}, f_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) \geq f_i(x_i, x_{-i}).$$

On dit que la stratégie \tilde{x}_i domine strictement la stratégie x_i si

$$\forall x_{-i} \in A_{-i}, f_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) > f_i(x_i, x_{-i}).$$

Définition Un équilibre de stratégie dominante est un choix de stratégies tel que pour chaque joueur, chaque stratégie domine faiblement toutes les autres stratégies possibles.

1.2 Notion de différences croissantes

Définition Soient (X, \leq) et (T, \leq) deux ensembles ordonnés. On dit qu'une application $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ possède des différences croissantes si

$$\forall (x, t), (x', t') \in X \times T, \begin{cases} x < x' \\ t < t' \end{cases} \implies f(x, t) - f(x, t') \leq f(x', t) - f(x', t').$$

Remarques

- On notera que la définition est "symétrique" en les deux ensembles X et T dans la mesure où l'inégalité de la définition se réécrit aussi par simple réarrangement des termes $f(x', t) - f(x, t) \leq f(x', t') - f(x, t')$.
- f possède des différences croissantes si et seulement si pour $t < t'$ avec $t, t' \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t) - f(x, t')$ est croissante (en x).
- On dit que f possède des différences croissantes strictes si l'inégalité large peut être remplacée par une inégalité stricte.
- La fonction f possède des différences décroissantes (respectivement des différences décroissantes strictes) si la fonction $x \mapsto f(x, t) - f(x, t')$ est décroissante (respectivement strictement décroissante). \square

La proposition ci-dessous montre que sous hypothèse de régularité suffisante, on parvient à caractériser aisément la propriété de différences croissantes.⁶

Proposition 1 On suppose que T est un sous-ensemble de \mathbb{R} et f est deux fois continûment différentiable.⁷ Alors on a l'équivalence

$$\forall (x, t) \in X \times T, f \text{ possède des différences croissantes} \iff \forall (x, t) \in X \times T, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) \geq 0.$$

Démonstration

On se donne $(x_0, t_0) \in X \times T$ et on suppose f possède des différences croissantes.

Pour $t < t'$ où $t, t' \in T$, $f(\cdot, t') - f(\cdot, t)$ est une fonction croissante (puisque f possède des différences croissantes), donc de dérivée positive (par continuité de la dérivée). Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t') \geq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$.

A ce stade, on a montré que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \cdot)$ est croissante sur T . Ainsi, par continuité de la dérivée seconde, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x_0, t_0) \geq 0$ puis $\forall (x, t) \in X \times T, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) \geq 0$ par le lemme de Schwarz.

Réciproquement, on suppose que $\forall (x, t) \in X \times T, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) \geq 0$.

On a $\forall x \in X, \forall t \in T, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right) \geq 0$, d'où l'on déduit que $\forall x \in X, \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est croissante. Ainsi, pour $t < t'$,

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t') - f(x, t)] \geq 0.$$

Cela implique que pour $t < t'$, $f(\cdot, t') - f(\cdot, t)$ est une fonction croissante; cela veut exactement dire que f possède des différences croissantes. \blacksquare

6. Le résultat a aussi été énoncé par Amir [1].

7. On dit aussi de classe \mathcal{C}^2 .

On donne à présent un théorème important, dû à Topkis et énoncé dans [1].

THÉORÈME 1.1 (DE TOPKIS) —

Soient X un sous-ensemble compact de \mathbb{R} et (T, \leq) un ensemble ordonné. Soit $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ une application qui possède des différences croissantes et telle que pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est semi-continue supérieurement. Alors

1. pour tout $t \in T$, $\sup_{x \in X} f(x, t)$ est fini et est atteint ;
2. l'ensemble $X_t := \arg \max_{x \in X} f(x, t)$ possède un plus grand élément $\bar{x}(t)$ et un plus petit élément $\underline{x}(t)$ appelés respectivement sélection maximum en t et sélection minimum en t .
3. les fonctions $t \mapsto \bar{x}(t)$ et $t \mapsto \underline{x}(t)$ sont croissantes.

Démonstration

1. On fixe $t \in T$. Supposons $x \mapsto f(x, t)$ non-majorée. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, f(x_n, t) \geq n.$$

Or X est compact, donc on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge, disons vers $x \in X$. Puisque $x \mapsto f(x, t)$ est semi-continue supérieurement en x , un passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ donne $f(x, t) \geq \infty$, ce qui est évidemment exclu.

Donc $M := \sup_{x \in X} f(x, t) < \infty$.

Ensuite, par définition de la borne supérieure, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in X, M - \frac{1}{n+1} \leq f(y_n, t)$. On peut supposer comme précédemment $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

Alors $n \rightarrow \infty$ donne $M \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n, t)$, donc aussi $M \leq f(y, t)$ par semi-continuité supérieure.

Ainsi $f(y, t) = M$.

2. Soit $t \in T$. Le point précédent montre que $X_t \neq \emptyset$. Puisque $X_t \subset X$ et X compact, on a X_t borné. On montre que $\sup X_t$ est atteint.

Or, il existe une suite $(x_n) \in X_t^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sup X_t$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \max_{x \in X} f(x, t) = f(x_n, t)$ et par semi-continuité supérieure en $\sup X_t$, on a également

$$\limsup_n f(x_n, t) \leq f(\sup X_t, t).$$

Il vient alors $\max_{x \in X} f(x, t) \leq f(\sup X_t, t)$ puis l'égalité par maximalité. Par conséquent, $\sup X_t \in X_t$

On montrerait exactement de la même façon que $\inf X_t \in X_t$.

3. Là encore, on choisit de démontrer uniquement la croissance de la sélection maximum.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(t, t') \in T^2$ tel que $t < t'$ et $\bar{x}(t) > \bar{x}(t')$. Alors, d'une part, par propriété de différences croissantes de f , on a

$$f(\bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t'), t) \leq f(\bar{x}(t), t') - f(\bar{x}(t'), t').$$

D'autre part, $0 \leq f(\bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t'), t)$ car $f(\bar{x}(t), t) = \max_{x \in X} f(x, t)$ et de même $f(\bar{x}(t), t') - f(\bar{x}(t'), t') \leq 0$ car $f(\bar{x}(t'), t') = \max_{x \in X} f(x, t')$.

Il résulte des trois inégalités précédentes qu'il y a en fait égalité partout. En particulier, on voit sur l'égalité $f(\bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t'), t') = 0$ que $\bar{x}(t) \in \arg \max_{x \in X} f(x, t')$. D'où $\bar{x}(t) \leq \bar{x}(t')$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Remarques

- La proposition 1 montre que les conclusions de statique comparative monotone du théorème de Topkis restent valides avec les hypothèses (plus fortes) que T est un sous-ensemble de \mathbb{R} , $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie $\forall (x, t) \in X \times T, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) \geq 0$.
- On peut aussi donner un théorème analogue en remplaçant partout "croissant" par "décroissant". □

1.3 Supermodularité

On introduit maintenant la classe des jeux supermodulaires qui présente des propriétés intéressantes.

1.3.1 Définitions

Définition *Le jeu sous forme stratégique (N_n, A_i, f_i) est un jeu supermodulaire si les espaces de stratégies A_i sont des sous-ensembles compacts de \mathbb{R} , si pour tout i , la fonction de paiement f_i est semi-continue supérieurement en x_i et si pour tout $(i, j) \in N_n^2$ avec $i \neq j$, pour tout $(y_{-i, -j}) \in A_{-i, -j}$, la fonction*

$$\begin{aligned} A_i \times A_j &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, x_j) &\mapsto f_i(x_i, x_j, y_{-i, -j}) \end{aligned}$$

possède des différences croissantes.

Remarques

- On parle aussi souvent de jeux à compléments stratégiques pour désigner les jeux supermodulaires.
- Il est clair au vu de la proposition 1 qu'un jeu non-coopératif sous forme stratégique possédant des fonctions de paiement deux fois continûment dérivables est un jeu supermodulaire dès lors que les ensembles de stratégies sont compacts et que pour tout $(i, j) \in N_n^2$ avec $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$.
- On parle de jeu strictement supermodulaire lorsque les f_i possèdent des différences croissantes strictes. \square

Par exemple, le jeu défini par $n = 2$, $A_1 = A_2 = [0, 1]$, $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ est un jeu strictement supermodulaire puisque les A_i sont des compacts et la propriété des différences croissantes des f_i découle du fait que si $x_1 < x'_1$ et $x_2 < x'_2$, alors $(x_1^2 - x_1'^2)(x_2^2 - x_2'^2) > 0$.

On voit sur cet exemple que les ensembles de stratégies (les A_i) ne sont pas sans influence sur la propriété de supermodularité; en outre, le même jeu où l'on remplace $[0, 1]$ par $[-1, 1]$ n'est pas supermodulaire.

1.3.2 Existence d'un équilibre

Ce paragraphe a pour objectif de présenter les théorèmes d'existence d'équilibres de Nash concernant les jeux supermodulaires. Pour affirmer l'existence d'équilibres en théorie des jeux supermodulaires, on exploite la monotonie des correspondances de meilleure réponse (résultant des fonctions de paiement qui sont supermodulaires).

Lemme 1 *On considère un jeu non-coopératif (N_n, A_i, f_i) et x un élément de A . Alors x est un équilibre du jeu si et seulement si $x \in r(x)$.*

Démonstration

On rappelle que $r(x) = \prod_{i=1}^n \arg \max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x_{-i})$ si bien que

$$\begin{aligned} x \in r(x) &\iff \forall i, f_i(x_i, x_{-i}) = \max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x_{-i}) \\ &\iff \forall i, \forall y_i \in A_i, f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}). \end{aligned}$$

Remarque

Comme toute application définie sur un ensemble et à valeurs dans l'ensemble des parties de cet ensemble, $r : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ n'est pas surjective. Plus précisément, on peut montrer que $\{x \in A, x \notin r(x)\}$ n'est pas un élément de l'image de r .

Autrement dit, d'après le lemme précédent, si $x_0 \in A$, alors $r(x_0) \neq \{x \in A, x \text{ n'est pas un équilibre}\}$. L'interprétation est assez naturelle : si on se donne une stratégie conjointe $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, on veut se rapprocher d'une situation d'équilibre; donc il va de soi que la meilleure réponse cumulée ne peut pas être l'ensemble des points de A qui ne sont pas des équilibres. \square

On définit maintenant une relation d'ordre⁸ sur \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) de la manière suivante. Pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x \leq y \stackrel{\text{déf}}{\iff} \forall i, x_i \leq y_i.$$

8. On notera que cet ordre n'est que partiel.

Si X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , on dira alors que $f : X \rightarrow X$ est une application croissante si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Le résultat suivant énoncé chez Amir ([1]) ou encore utilisé par Vives dans ([13]), constitue sans doute l'argument essentiel dans la preuve de l'existence d'un équilibre pour les jeux supermodulaires.

THÉORÈME 1.2 (DE TARSKI) —

Soient K_1, \dots, K_n n intervalles compacts non-vides de \mathbb{R} et $K := K_1 \times \dots \times K_n$.

Alors toute fonction croissante $f : K \rightarrow K$ admet un point fixe dans K .

Démonstration

Soit $E := \{x \in K, f(x) \geq x\}$. On montre d'abord que E possède une borne supérieure pour la relation d'ordre définie précédemment.

On note (f_1, \dots, f_n) les fonctions coordonnées de l'application f . On note $E_i := \{x_i \in K_i, f_i(x_i) \geq x_i\}$.

Si $x \in E$, alors $\forall i, x_i \in E_i$. Or E est non-vide : en effet, puisque les K_i sont des compacts de \mathbb{R} , $(\min K_1, \dots, \min K_n) \in K$, donc $f(\min K_1, \dots, \min K_n) \in K$ (car f est à valeurs dans K) ; or tout élément de K est supérieur à $(\min K_1, \dots, \min K_n)$ (car K est un produit cartésien de compacts), en particulier $f(\min K_1, \dots, \min K_n) \geq (\min K_1, \dots, \min K_n)$, ce qui montre que $(\min K_1, \dots, \min K_n) \in E$. Ainsi les E_i sont non-vides. De plus les E_i sont des parties de \mathbb{R} majorés par $\max K_i$, donc chaque E_i possède une borne supérieure ; on a en outre $\sup E_i \in K_i$ (on utilise ici le fait que K_i est un fermé de \mathbb{R}). Il est clair que $x \leq (\sup E_1, \dots, \sup E_n)$.

Ensuite, si $\tilde{x} \in K$ est tel que $\forall x \in E, x \leq \tilde{x}$ (c'est-à-dire est un majorant de E), on montre que $(\sup E_1, \dots, \sup E_n) \leq \tilde{x}$. En effet, pour i décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$, pour des $x_i \in E_i$, on a $(x_1, \dots, x_n) \in E$, de sorte que $\forall i, x_i \leq \tilde{x}_i$. Cela étant valable pour tout $x_i \in E_i$, on a aussi par passage à la borne supérieure dans chacun des E_i : $\forall i, \sup E_i \leq \tilde{x}_i$; autrement dit, $(\sup E_1, \dots, \sup E_n) \leq \tilde{x}$.

Cela montre que E possède une borne supérieure (qui est $\sup E := (\sup E_1, \dots, \sup E_n) \in K$).

On va montrer maintenant que $\sup E$ est un point fixe de f .

D'une part, $\forall x \in E, x \leq \sup E$, donc par croissance de f et par définition de E , on a $\forall x \in E, x \leq f(x) \leq f(\sup E)$. Par passage à la borne supérieure dans E , on obtient $\sup E \leq f(\sup E)$.

Par croissance de f , on a alors aussi $f(\sup E) \leq f(f(\sup E))$, si bien que $f(\sup E) \in E$; par conséquent $f(\sup E) \leq \sup E$.

Finalement, $f(\sup E) = \sup E$. ■

Remarque

Le point crucial dans la démonstration proposée ci-dessus consiste à montrer l'existence d'une borne supérieure pour E (qui n'est pas évidente *a priori* par opposition au cas $n = 1$, mais qui se justifie à cause de la relation d'ordre adéquate introduite précédemment). La fin de la démonstration est quant à elle plus classique (c'est la même que pour la dimension 1) et applicable sans changement pour le cas plus général des treillis complets. □

Proposition 2 *Tout jeu supermodulaire possède un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Démonstration

Soit (N_n, A_i, f_i) un jeu supermodulaire.

Pour $i \in N_n$, on avait défini l'application

$$r_i : \begin{array}{ll} A_{-i} & \rightarrow \mathcal{P}(A_i) \\ x_{-i} & \mapsto \arg \max_{x_i \in A_i} f_i(x_i, x_{-i}) \end{array} .$$

A_{-i} est un ensemble ordonné et A_i est une partie compacte de \mathbb{R} . De plus, pour tout $i, x_i \mapsto f_i(x_i, x_{-i})$ est semi-continue supérieurement.

Les hypothèses du théorème de Topkis sont ainsi vérifiées. Il résulte que les sélections maximum

$$\bar{s}_i : \begin{array}{ll} A_{-i} & \rightarrow A_i \\ x_{-i} & \mapsto \bar{s}_i(x_{-i}) \end{array}$$

et minimum

$$\underline{s}_i : \begin{array}{ll} A_{-i} & \rightarrow A_i \\ x_{-i} & \mapsto \underline{s}_i(x_{-i}) \end{array}$$

sont croissantes.

Pour la correspondance de meilleure réponse cumulée, on a des sélections maximum et minimum définies respectivement par

$$\begin{aligned} \bar{s} : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto (\bar{s}_1(x_{-1}), \dots, \bar{s}_n(x_{-n})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{s} : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto (\underline{s}_1(x_{-1}), \dots, \underline{s}_n(x_{-n})) \end{aligned}$$

qui sont donc croissantes.

Comme A est le produit cartésien de compacts de \mathbb{R} , le théorème de Tarski montre que \bar{s} et \underline{s} possèdent des points fixes.

Enfin, si $x \in A$ est un point fixe de \bar{s} ou de \underline{s} , alors $x \in \prod_{i \in N_n} \arg \max_{x_i \in A_i} f_i(x_i, x_{-i})$, c'est-à-dire $x \in r(x)$. Mais en vertu du lemme 1, cela signifie que x est un équilibre du jeu.

1.3.3 Propriétés paramétriques des points d'équilibre

Il peut évidemment être intéressant d'un point de vue de la théorie économique de savoir comment se comporte un équilibre lorsque l'environnement d'un jeu évolue. Dans le cadre des jeux supermodulaires, on va pouvoir connaître assez aisément l'évolution des équilibres suite à une modification des paramètres qui caractérisent les fonctions de paiement des joueurs. Le résultat majeur qui a été montré par Amir ([1]) est exposé ci-après. Nous en détaillons la démonstration.

On fixe à présent T un ensemble ordonné. On se donne toujours N_n un ensemble de n joueurs et des sous-ensembles A_i de \mathbb{R} .

On suppose maintenant que pour tout i , f_i est une application de $A \times T$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dira qu'un jeu (N_n, A_i, f_i, T) est un jeu supermodulaire indicé par les éléments de T lorsque pour tout $t \in T$, le jeu $(N_n, A_i, f_i(\cdot, t))$ est supermodulaire.

THÉORÈME 1.3 (DE MILGROM ET ROBERTS) —

Soit (N_n, A_i, f_i, T) un jeu supermodulaire indicé par les éléments de T . On suppose en outre que pour tout $i \in N_n$, pour tout $x_{-i} \in A_i$, la fonction

$$\begin{aligned} A_i \times T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, t) &\mapsto f_i(x_i, x_{-i}, t) \end{aligned}$$

possède des différences croissantes.

Alors le plus grand et le plus petit équilibre de Nash en stratégies pures du jeu sont fonctions croissantes de t .

Démonstration

Pour tout $t \in T$, il existe des équilibres de Nash en stratégies pures pour le jeu $(N_n, A_i, f_i(\cdot, t))$, d'après la démonstration de la proposition 2.

On note $\hat{x}(t)$ et $\check{x}(t)$ le plus grand et le plus petit équilibre de Nash en stratégies pures du jeu $(N_n, A_i, f_i(\cdot, t))$. Il s'agit de voir que $t \mapsto \hat{x}(t)$ et $t \mapsto \check{x}(t)$ sont des fonctions croissantes.

On ne fera la démonstration que pour $t \mapsto \hat{x}(t)$, l'autre étant analogue.

On fixe $t_1 < t_2$ deux éléments de T .

Pour tout t et tout i , on définit une correspondance de meilleure réponse du joueur i pour le jeu $(N_n, A_i, f_i(\cdot, t))$:

$$\begin{aligned} r_i(t) : A_{-i} &\rightarrow \mathcal{P}(A_i) \\ x_{-i} &\mapsto \arg \max_{x_i \in A_i} f_i(x_i, x_{-i}, t) \end{aligned}$$

Pour chaque $x_{-i} \in A_{-i}$, l'hypothèse des différences croissantes en (x_i, t) de f_i permet d'appliquer le théorème de Topkis : pour chaque $x_{-i} \in A_{-i}$, la sélection maximum correspondante, notée $\bar{r}_i(x_{-i}, t)$, est une fonction croissante de t . Ainsi $\bar{r}_i(x_{-i}, t_1) \leq \bar{r}_i(x_{-i}, t_2)$.

Il résulte de cela que la sélection maximum de la meilleure réponse cumulée au paramètre t , définie par

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto (\bar{r}_1(x_{-1}, t), \dots, \bar{r}_n(x_{-n}, t)) \end{aligned}$$

vérifie également $\forall x \in A, \bar{r}(t_1)(x) \leq \bar{r}(t_2)(x)$.

Comme $\hat{x}(t_1)$ est le plus grand équilibre de Nash au paramètre t_1 , $\hat{x}(t_1)$ correspond au plus grand point fixe de l'application

$x \mapsto \bar{r}(t_1)(x)$. Détaillons-en l'argument. D'abord, l'application $\bar{r}(t_1)$ a un point fixe X (c'est une application du théorème de Tarski), si bien que X est un équilibre de Nash en t_1 (l'argument est le même qu'à la fin de la démonstration de la proposition 2). On peut supposer que X est le plus grand point fixe de $\bar{r}(t_1)$. Mais tout équilibre de Nash en t_1 s'obtient comme un élément de $\prod_i \arg \max_{x_i \in A_i} f_i(x_i, X_{-i}, t_1)$ d'après le lemme 1. Puisque $\bar{r}(t_1)$ est la sélection maximum, il vient $\hat{x}(t_1) = X$.

On note maintenant $B_i := [\hat{x}_i(t_1), \max A_i] \cap A_i$ (c'est un compact) et $B := \prod_{i=1}^n B_i$. Si on montre (*) : $\bar{r}(t_2)(B) \subset B$,

alors par le théorème de point fixe de Tarski, l'application $\bar{r}(t_2)$ restreinte à B possède un point fixe \tilde{y} qui est évidemment plus grand que $\hat{x}(t_1)$.

En particulier, puisque $\hat{x}(t_2)$ est le plus grand point fixe de $\bar{r}(t_2)$, on a $\hat{x}(t_2) \geq \tilde{y} \geq \hat{x}(t_1)$, ce que l'on voulait démontrer.

Il reste encore à établir (*).

Or, si $z = (z_1, \dots, z_n) \in B$, on a

$$\begin{aligned} \bar{r}(t_2)(z) &\geq \bar{r}(t_1)(z) && \text{(inégalité établie ci-dessus)} \\ &\geq \bar{r}(t_1)(\hat{x}(t_1)) && \text{car } z \geq \hat{x}(t_1) \text{ et à } t \text{ fixé, } x \mapsto \bar{r}(t)(x) \text{ est croissante d'après la démonstration de la proposition 2} \\ &= \hat{x}(t_1) && \text{car } \hat{x}(t_1) \text{ est un point fixe.} \end{aligned}$$

2 Concurrence en quantité et en prix - dualité

2.1 Quelques définitions

Définition On parle de monopole pour désigner une situation caractérisée par le fait qu'une entreprise a le contrôle exclusif d'un produit sur un marché donné.

Définition On parle d'oligopole pour désigner l'interaction d'un petit nombre d'entreprises sur un marché donné.

Lorsqu'on étudie une situation de monopole ou d'oligopole, on prend pour référence une variable stratégique (comme la quantité ou le prix) et on détermine comment évolue par exemple le profit de chaque entreprise, leur offre de production et leur demande de facteur de production (inputs) en fonction de cette variable ou d'autres paramètres comme les prix des inputs ou les conditions de marché.

2.2 Concurrence en quantité et en prix dans le cas d'un bien homogène

L'intérêt de ce paragraphe est de présenter deux modèles d'oligopoles où la variable stratégique est la quantité ou le prix.

On va voir aussi dans quelle mesure la solution des jeux peut s'interpréter comme un équilibre en quantité ou en prix.

On considère le marché d'un bien homogène vendu par un nombre de firmes fixé n à un grand nombre de consommateurs.

Le comportement des consommateurs peut être représenté par une fonction de demande D , associant à tout prix unitaire $p \in [0, +\infty[$ la quantité totale q demandée du bien (définie dans $[0, +\infty[$); autrement dit, $q = D(p)$.

Le produit homogène peut être produit en quantités q_i , où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La production totale (par l'ensemble des

firmes) est ainsi $q := \sum_{i=1}^n q_i$.

Le prix de marché p associé à cette production s'obtient comme une fonction de q , appelée fonction de demande inverse et notée Δ . Ainsi $p = \Delta(q)$. On supposera que D et Δ sont inverses l'une de l'autre. On fait d'ailleurs souvent l'hypothèse que D et Δ sont au moins continues et strictement décroissantes puis nulles à partir d'un certain réel positif assez grand.

2.2.1 Un modèle de concurrence en quantité : l'oligopole de Cournot

Description de l'oligopole et de ses équilibres.

On numérote les firmes de 1 à n .

La variable stratégique est ici la quantité.

Chaque firme $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ peut offrir une quantité q_i pour un coût total $C_i(q_i)$ et annoncer son prix $\psi_i \geq 0$. Les C_i sont appelées fonctions de coût.

On supposera Δ et les C_i de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[$.

La fonction de profit (ou de paiement) Π_i de la firme i (qui dépend des quantités produites par toutes les firmes) s'exprime naturellement par

$$\Pi_i(q_1, \dots, q_n) = \Delta(q_1 + \dots + q_n)q_i - C_i(q_i).$$

Le profit maximal pour la firme i s'exprime par $\max_{q_i} \Pi_i(q_1, \dots, q_n)$.

Un équilibre de Nash en stratégies pures est alors un ensemble de quantités (q_1^*, \dots, q_n^*) tel que chaque firme choisit la quantité qui maximise son profit compte tenu de ses conjectures sur le choix des autres firmes.

Un tel équilibre de Nash doit donc satisfaire $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q_1^*, \dots, q_n^*) = 0$ (condition du premier ordre) et

$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q_1^*, \dots, q_n^*) \leq 0$ (condition du second ordre), c'est-à-dire :

$$\forall i, \begin{cases} \Delta \left(\sum_{j=1}^n q_j^* \right) + \Delta' \left(\sum_{j=1}^n q_j^* \right) q_i^* - C'_i(q_i^*) = 0 \\ 2\Delta' \left(\sum_{j=1}^n q_j^* \right) + \Delta'' \left(\sum_{j=1}^n q_j^* \right) q_i^* - C''_i(q_i^*) \leq 0 \end{cases} .$$

Maintenant, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on souhaite exprimer la production optimale de la firme i (au voisinage d'un équilibre de Nash) en fonction de ses anticipations sur le choix de production des autres entreprises. On utilisera beaucoup les notations de la section 1 (par exemple, on notera fréquemment q^* au lieu de (q_1^*, \dots, q_n^*) dans ce qui suit).

L'application $(q_1, \dots, q_n) \mapsto \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[^n$.

On considère un certain équilibre de Nash en q^* ; alors $\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q^*) = 0$.

On fait enfin l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 On suppose $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q^*) \neq 0$.

En outre, par continuité de l'application $q \mapsto \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q)$, il existe un voisinage \tilde{U}_i de q^* dans $]0, \infty[^n$ tel que $\forall q \in \tilde{U}_i, \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q) < 0$.

Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe U_i^* un voisinage ouvert de q_{-i}^* dans $]0, \infty[^{n-1}$, V_i^* un voisinage ouvert de q_i^* dans $]0, \infty[$ et $\phi_i : U_i^* \rightarrow V_i^*$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 tels que $U_i^* \times V_i^* \subset \tilde{U}_i$, $q_i^* = \phi_i(q_{-i}^*)$ et $\left\{ (q_{-i}, q_i) \in U_i^* \times V_i^* \mid \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n) = 0 \right\} = \{(q_{-i}, \phi_i(q_{-i})) \mid q_{-i} \in U_i^*\}$.

Définition La fonction ϕ_i s'appelle fonction de réaction de l'entreprise i .

Remarque

Cette fonction de réaction est une fonction de meilleure réponse si on reprend le vocabulaire de la section 1. \square

Proposition 3 On fixe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sous l'hypothèse (1) ci-dessus, pour tout $j \neq i$,

$$\forall q \in U_i^* \times V_i^*, \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(q_{-i}) = - \frac{\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_j \partial q_i}(q)}{\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q)} .$$

Démonstration

On a $\forall q_{-i} \in U_i^*, \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q_{-i}, \phi_i(q_{-i})) = 0$. En dérivant cette égalité par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable, il vient

$$\forall q_{-i} \in U_i^*, \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_j \partial q_i}(q_{-i}, \phi_i(q_{-i})) + \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q_{-i}, \phi_i(q_{-i})) \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}(q_{-i}) = 0 .$$

Il reste à remarquer que $\phi_i(q_{-i}) = q_i$ et que le terme $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2}(q)$ est non-nul. \blacksquare

On considère à présent le cas $n = 2$ (situation de duopole) et un équilibre (q_1^*, q_2^*) de sorte que les fonctions de réaction ϕ_1 et ϕ_2 soient d'une seule variable.

On a alors au voisinage de (q_1^*, q_2^*) les relations suivantes : $\phi_1(q_1) = q_2$, $\phi_2(q_2) = q_1$ et

$$\phi'_1(q_2) = - \frac{\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2}(q)}{\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2}(q)}, \phi'_2(q_1) = - \frac{\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_1 \partial q_2}(q)}{\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2}(q)} .$$

En raison de la condition du second ordre, le dénominateur est négatif, de sorte que la pente de la courbe de réaction de la firme $i \in \{1, 2\}$ (qui correspond au graphe de la fonction de réaction de i au voisinage d'un équilibre de Nash) est déterminée par le signe du numérateur (le signe de la dérivée partielle croisée).

On a $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_1 \partial q_2}(q_1^*, q_2^*) = \Delta'(q_1^* + q_2^*) + \Delta''(q_1^* + q_2^*)q_i^*$.

Dans la plupart des cas (ce que considère par exemple Varian [12]), la fonction de demande inverse Δ est concave ($\Delta'' \leq 0$) de sorte que les courbes de réaction des firmes ont une pente généralement négative dans le modèle de Cournot.

On termine l'étude de l'oligopole de Cournot en donnant une condition suffisante à l'existence d'un équilibre à cet oligopole.

Existence d'un équilibre de Cournot.

Notons d'abord que si le jeu considéré dans le modèle de Cournot est supermodulaire, la proposition 2 s'applique. Cela dit, il ne s'agit pas du cas le plus naturel de jeu de Cournot. En revanche, dans le cas du duopole de Cournot ($n = 2$), on peut donner un critère qui se rapproche davantage de la réalité et qui permet d'assurer l'existence d'un équilibre à un tel jeu.⁹

Proposition 4 *Considérons le jeu non-coopératif sous forme stratégique (N_2, A_i, f_i) . On suppose que pour chaque $i \in \{1, 2\}$, A_i est un intervalle compact de \mathbb{R} , f_i a des différences décroissantes et en outre que pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, $a_i \mapsto f_i(a_i, a_{-i})$ est semi-continue supérieurement. Alors il existe un équilibre au jeu considéré.*

Démonstration

Pour $i \in \{1, 2\}$, on considère r_i la correspondance de meilleure réponse associée au jeu, comme définie dans la partie 1. Les sélections maximum \bar{r}_i sont alors décroissantes en vertu du théorème de Topkis. L'application composée $\bar{r}_2 \circ \bar{r}_1 : A_2 \rightarrow A_2$ est alors croissante. Le théorème de Tarski donne alors l'existence d'un point fixe (noté \bar{a}_2) de $\bar{r}_2 \circ \bar{r}_1$. L'élément $(\bar{r}_1(\bar{a}_2); \bar{a}_2)$ est alors un point fixe de $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2)$, donc un équilibre. ■

Remarques

- Les hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites dès lors que les fonctions de coût C_i sont des fonctions strictement croissantes et semi-continues inférieurement et dès lors que Δ est une fonction continue strictement décroissante avec $\Delta(q_1 + q_2) = 0$ dès que $q_1 + q_2$ est supérieur à un certain réel positif A et telle que $\log \circ \Delta$ est concave sur $[0, A]$.
- Il existe d'autres moyens permettant d'assurer l'existence d'un équilibre (que l'on peut trouver chez Vives dans [13]), mais tous reposent sur l'application d'un théorème de point fixe.
- Signalons aussi qu'il existe, sous certaines hypothèses (notamment la concavité des fonctions de paiement, l'hypothèse que les fonctions de demande et de demande inverse sont à support compact, que les quantités sont bornées), des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'assurer l'unicité d'un équilibre de Cournot. Par exemple, l'article [5] de Kolstad et Mathiesen fournit une condition en termes de stricte positivité du jacobien de l'application $(q_1, \dots, q_n) \mapsto (\Pi_1(q), \dots, \Pi_n(q))$; l'article [6] propose quant à lui la méthode consistant à déterminer une application contractante. Ces deux façons de procéder sont d'ailleurs reprises chez Vives dans [13]. □

2.2.2 Un modèle de concurrence en prix : l'oligopole de Bertrand

Une première approche du duopole de Bertrand¹⁰

On fixe ici $n = 2$. Le duopole de Bertrand est un duopole en prix sur le marché d'un bien homogène. On suppose que chaque firme a des coûts unitaires marginaux de production constants c_1 et c_2 (quitte à renuméroter les

9. Le critère en question est présent chez Vives dans [13]

10. Bertrand a toutefois considéré des modes de concurrences plus généraux que la concurrence en prix qui lui est généralement attribuée

firmes, on peut supposer $c_1 < c_2$. Les deux firmes sont confrontées à une fonction de demande de marché $p \mapsto D(p)$ (non-nulle), où $p \in \mathbb{R}_+$.

La demande D_i qui s'adresse au producteur i est déterminée dans le modèle de Bertrand de la manière suivante :

$$\text{Pour } j \neq i, D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}D(p_i) & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}.$$

En particulier, l'entreprise i pense qu'elle peut s'emparer de la totalité du marché si le prix qu'elle fixe est inférieur (strictement) à celui de la firme j .

Le profit du producteur i est donné par $\Pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i)D_i(p_1, p_2)$.

Recherchons un équilibre de Nash d'un tel jeu.

Soient p_1^* et p_2^* les prix fixés par 1 et 2 à un tel équilibre.

Proposition 5 *Sous l'hypothèse que $c_1 < c_2$, un équilibre de Nash vérifie $p_1^* = c_2$ et $p_2^* \geq p_1^*$. En outre, $D(p_1^*) = D(c_2)$ et $D(p_2^*) = 0$.*

Démonstration

- Supposons que $p_1^* > c_2$. Alors si 2 anticipait ce choix de 1, on aurait $p_2^* \in]c_2, p_1^*]$ (de manière à ce que $\Pi_2(p_1^*, p_2^*) > 0$ et que 2 puisse s'emparer de la totalité du marché). Alors $\Pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ et $\Pi_2(p_1^*, p_2^*) > 0$. Mais cela n'est pas un équilibre de Nash (d'après l'hypothèse faite sur les coûts de production).
- Supposons à présent que $p_1^* < c_2$, alors 2 choisirait de ne rien produire (car $p_2^* < c_2 \implies \Pi_2 < 0$ et $p_2^* \geq c_2 \implies D_2(p_1, p_2) = 0$). Mais alors tout $\tilde{p}_1^* \in]p_1^*, c_2[$ vérifierait encore ce qui précède et $\Pi_1(\tilde{p}_1^*, p_2^*) > \Pi_1(p_1^*, p_2^*)$; ainsi 1 pourrait augmenter son profit en augmentant légèrement son profit. Cela n'est donc pas un équilibre.
- Nécessairement $p_1^* = c_2$. Alors on a aussi $p_2^* \geq p_1^*$. ■

Une approche utilisant la théorie des jeux supermodulaires

On se place dans une situation de concurrence en prix avec des biens différenciés : lorsque chaque firme $j \in N_n$ fixe un prix $p_j \in \mathbb{R}_+$ et a un coût de production unitaire $c_j \in \mathbb{R}_+$, le profit de la firme i s'exprime par $\Pi_i(p_i, p_{-i}, c_i) := (p_i - c_i)D_i(p_i, p_{-i})$ où D_i désigne la fonction de demande. On supposera pour tout i que D_i est de classe \mathcal{C}^2 .

On suppose dans un premier temps les c_i fixés, de telle sorte que les fonctions de paiement Π_i dépendent uniquement de p_1, \dots, p_n .

Pour chaque i , étant donné que les prix compris dans l'intervalle $[0, c_i[$ sont des stratégies dominées, on peut se limiter au cas où les prix p_i appartiennent à l'intervalle $[c_i, +\infty[$. Pour travailler finalement avec des intervalles compacts, on fixe M de telle sorte que $\forall i, p_i \leq M$ et on considère les ensembles $A_i := [c_i, M]$.¹¹

On prendra aussi comme convention :

$$\log(0) = -\infty \text{ et } -\infty - \infty = -\infty.$$

Alors pour i fixé, $\forall p_i \in A_i$, $\log F_i(p_i, p_{-i}, c_i) = \log(p_i - c_i) + \log(D_i(p_i, p_{-i}))$. Le jeu est alors log-supermodulaire si $\forall i, \forall j \neq i$, $\log F_i : A_i \times A_j \rightarrow \mathbb{R}$ a des différences croissantes.

Proposition 6 *Le jeu de concurrence en prix est log-supermodulaire en (p_i, p_{-i}) si pour tout $i \neq j$,*

$$D_i \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial D_i}{\partial p_i} \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p_i, p_j, p_{-i, -j}) \geq 0.$$

Démonstration

D'après la proposition 1, il suffit de voir que $\forall i \neq j, \forall p_{-i, -j} \in A_{-i, -j}$, $\frac{\partial^2 \log F_i}{\partial p_i \partial p_j}(p_i, p_j, p_{-i, -j}) \geq 0$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log F_i}{\partial p_i \partial p_j}(p_i, p_j, p_{-i, -j}) &= \frac{\partial^2 \log D_i}{\partial p_i \partial p_j}(p_i, p_j, p_{-i, -j}) \\ &= \frac{1}{D_i(p_i, p_j, p_{-i, -j})^2} \left[D_i \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial D_i}{\partial p_i} \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \right](p_i, p_j, p_{-i, -j}). \end{aligned}$$

11. On fait ici l'hypothèse légitime que les prix ne peuvent pas être arbitrairement grands.

Examinons à présent le cas où $c = (c_1, \dots, c_n)$ varie dans $[0, +\infty[^n$.

$(p_i, c_j) \mapsto \log(p_i - c_j)$ a des différences croissantes car :

$$\frac{\partial^2 \log(p_i - c_j)}{\partial p_i \partial c_j} = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{p_i - c_j} \right) = \frac{1}{(p_i - c_j)^2} & \text{si } j \neq i \\ \frac{\partial}{\partial p_i}(0) = 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Ainsi, si $\log D_i$ a des différences croissantes, le théorème de Milgrom et Roberts indique que le plus grand et le plus petit prix d'équilibre sont des fonctions croissantes du paramètre $c = (c_1, \dots, c_n)$.

L'accroissement pour chaque firme de son plus grand et de son plus petit prix d'équilibre est lié à la combinaison de deux effets :

- un effet direct : la réaction d'une firme suite à l'augmentation du coût unitaire de production qui répercute ce coût plus important sur son prix de vente. (Mathématiquement, cela est dû à l'hypothèse de différences croissantes en (p_i, c_j) des fonctions de paiement.)
- un effet indirect : la réaction de la demande d'une firme suite à l'augmentation des prix fixés par toutes les autres firmes. (Mathématiquement, cela est dû à l'hypothèse des différences croissantes en (p_i, p_{-i}) des fonctions de paiement.)

Plus précisément, une firme qui voit son coût unitaire de production augmenter va augmenter son prix via la combinaison des deux effets précédents.

Une firme dont le coût unitaire de production reste constant va augmenter son prix, mais seulement via l'effet indirect.

2.3 Quelques exemples de situation de dualité.

2.3.1 Dualité entre le duopole et le monopole complémentaire de Cournot, cas de biens parfaitement substituables

Dans ce paragraphe qui résume l'article de Sonnenschein ([11]), on considère deux firmes 1 et 2 ayant des coûts marginaux de production constants.

On rappelle que si 1 et 2 sont dans une situation de duopole de Cournot, elle vendent un produit identique (bien homogène).

On va voir que cette situation est analogue à la situation de monopole complémentaire qui a aussi été étudiée par Cournot.

On commence par la définition suivante.

Définition On appelle *monopole complémentaire* une situation de marché pour laquelle les deux firmes vendent des produits distincts (biens hétérogènes ou différenciés) et la somme des prix fixés par les firmes (notée $p_1 + p_2$) détermine une certaine quantité de produits réclamée par les consommateurs (notée $D(p_1 + p_2)$).

Remarque

La définition va tout à fait dans le sens de l'intuition économique que l'on peut avoir. En effet, dans le cas de biens complémentaires, on peut très bien supposer que le consommateur achète toujours les deux biens "simultanément" de sorte que le prix qu'il paie corresponde à $p_1 + p_2$. \square

On constate un premier rapprochement entre les deux théories puisque le duopole de Cournot consiste en une situation pour laquelle la somme des quantités produites par les deux firmes (notée $q_1 + q_2$) détermine un prix pour les produits de chacune des firmes (notée $\Delta(q_1 + q_2)$).

Remarque

Comme le font beaucoup d'économistes, on appelle D la fonction de demande et Δ la fonction de demande inverse. \square

Comme dans le paragraphe 2.2.1, on peut obtenir des fonctions de réaction pour 1 et 2 dans le modèle du monopole complémentaire.

En outre, si la réaction de 1 à une quantité q_2 est donnée formellement par $\arg \max_{q_1} \{q_1 \Delta(q_1 + q_2) - c(q_1)\}$ dans le modèle du duopole de Cournot, la réaction de 1 à un prix p_2 est donnée formellement par $\arg \max_{p_1} \{p_1 D(p_1 + p_2) -$

$c(D(p_1))$ dans le modèle du monopole complémentaire.

Il existe donc une certaine équivalence entre les deux théories de Cournot ; il est clair que l'on peut obtenir une de ces théories à partir de l'autre par une simple reparamétrisation et réinterprétation des symboles et des lettres.

Remarque

Par conséquent, un résultat valide pour une théorie admet un résultat "dual" pour l'autre théorie. Cela permet souvent de prouver deux théorèmes pour le prix d'un. \square

2.3.2 Biens différenciés complémentaires et substituables, cas de systèmes de demande linéaires.

Etude du duopole. Bien que les duopoles de Cournot et de Bertrand soient de nature différente (ils ne sont pas équivalents en toute généralité), on parvient à mettre en évidence (comme au paragraphe précédent) une certaine dualité entre les équilibres de Cournot et de Bertrand dans le cas de biens différenciés.

De manière à accentuer l'idée de dualité, on développe comme Singh et Vives dans [10] le cas où l'on considère deux biens différenciés et où les fonctions de demande (et de demande inverse) sont linéaires.¹²

L'indice $i \in \{1, 2\}$ réfèrera au bien i .

Supposons que les fonctions de demande inverse des consommateurs prennent la forme

$$\begin{cases} \Delta_1(q_1, q_2) = \alpha_1 - \beta_1 q_1 - \gamma q_2 \\ \Delta_2(q_1, q_2) = \alpha_2 - \gamma q_1 - \beta_2 q_2 \end{cases},$$

où les paramètres α_i et γ sont positifs et où les β_i sont strictement positifs.

On note $\delta := \beta_1 \beta_2 - \gamma^2$ le déterminant du système

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 q_1 - \gamma q_2 = p_1 \\ \alpha_2 - \gamma q_1 - \beta_2 q_2 = p_2 \end{cases}.$$

Remarquons que ce système s'écrit de manière plus compacte sous la forme

$$\Delta(q) = \alpha + Aq,$$

où α désigne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, q désigne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} -\beta_1 & -\gamma \\ -\gamma & -\beta_2 \end{pmatrix}$.

Remarque

Si $\gamma = 0$, les marchés sont indépendants.

Si d'une part $\alpha_1 = \alpha_2$ et d'autre part $\beta_1 = \beta_2 = \gamma$, les biens sont des substitus parfaits. \square

Dans le cas où les marchés ne sont pas indépendants (c'est-à-dire $\delta \neq 0$), la matrice A est inversible ; cela donne $D(p) = A^{-1}(p - \alpha)$, ou plus explicitement, le système écrit précédemment correspond aux fonctions de demande :

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2}{\delta} - \frac{\beta_2}{\delta} p_1 + \frac{\gamma}{\delta} p_2 \\ D_2(p_1, p_2) = \frac{\alpha_2 \beta_1 - \gamma \alpha_1}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} p_1 - \frac{\beta_1}{\delta} p_2 \end{cases}.$$

Pour alléger l'écriture, on notera :

$$\begin{cases} D_1(p_1, p_2) = a_1 - b_1 p_1 + c p_2 \\ D_2(p_1, p_2) = a_2 + c p_1 - b_2 p_2 \end{cases},$$

avec les $a_i \in \mathbb{R}$, les $b_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $c \geq 0$. Le déterminant de ce système sera noté d dans la suite.

¹². Il est vrai que l'on parle toujours de fonctions de demande "linéaires" dans la littérature. En toute rigueur, on devrait dire "affines" puisque l'on ne suppose pas $\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$.

Remarque

Les biens 1 et 2 sont dits complémentaires au sein de D_i si la dérivée de D_i par rapport à p_1 a le même signe que la dérivée de D_i par rapport à p_2 .

On suppose les coûts marginaux des deux firmes nuls.

Le paragraphe 2.2.1 montre que si la firme 1 a un concurrent qui a un comportement du type Cournot, elle maximise $(\alpha_1 - \beta_1 q_1 - \gamma q_2)q_1$ et si la firme 1 a un concurrent dont le comportement est du type Bertrand, le paragraphe 2.2.2 montre qu'elle maximise $(a_1 - b_1 p_1 + c p_2)p_1$.

On voit clairement une certaine dualité entre les deux comportements ; les deux expressions sont de la même nature aux constantes et aux signes près.

Aussi, l'équilibre de Cournot lorsque les produits sont substituables (alors $0 < \gamma$) a essentiellement la même structure mathématique que l'équilibre de Bertrand lorsque $\gamma < 0$ (ou encore $\delta < 0$), soit encore lorsque les biens sont complémentaires.

On comprend dès lors qu'un résultat concernant le duopole de Cournot correspond à un résultat de concurrence à la Bertrand. Il suffit de changer les lettres. En utilisant cette dualité, on peut par exemple trouver la fonction de réaction de la firme 1 dans le modèle de Bertrand à partir de la même fonction de réaction dans le modèle de Cournot.

D'après le paragraphe 2.2.1, la fonction de réaction de l'entreprise 1 dans le modèle de Cournot est $q_2 \mapsto \frac{\alpha_1 - \gamma q_2}{2\beta_1}$.

On déduit que la fonction de réaction de la même entreprise dans le modèle de Bertrand est donnée par : $p_2 \mapsto \frac{a_1 + c p_2}{2b_2}$.

Nous poursuivons le paragraphe par le calcul des équilibres de Cournot (dans le modèle linéaire introcuit) relatifs à la concurrence en quantité d'une part et à la concurrence en prix d'autre part.

Notant $\Pi_1^{(q)}(q_1, q_2) := (\alpha_1 - \beta_1 q_1 - \gamma q_2)q_1$ et $\Pi_2^{(q)}(q_1, q_2) := (\alpha_2 - \gamma q_1 - \beta_2 q_2)q_2$ les fonctions de profit des firmes 1 et 2 respectivement dans le modèle de concurrence en quantité, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1^{(q)}}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2^{(q)}}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 - 2\beta_1 q_1 - \gamma q_2 = 0 \\ \alpha_2 - \gamma q_1 - 2\beta_2 q_2 = 0 \end{cases}.$$

Remarquons que $\frac{\partial^2 \Pi_1^{(q)}}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) = -2\beta_1 \leq 0$ et $\frac{\partial^2 \Pi_2^{(q)}}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) = -2\beta_2 \leq 0$, de sorte que la résolution du système précédent conduise à l'équilibre de Cournot en quantité suivant :

$$q^C = \frac{1}{4\beta_1\beta_2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 2\alpha_1\beta_1 - \gamma\alpha_2 \\ 2\alpha_2\beta_1 - \gamma\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de mentionner que Singh et Vives ont introduit cette notation q^C pour désigner cet équilibre en quantité dans le modèle de Cournot.

Le prix p^C correspondant à cette quantité est égal à $\alpha + Aq^C$; plus explicitement :

$$p^C = \frac{1}{4\beta_1\beta_2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 2\alpha_1\beta_1\beta_2 - \gamma\alpha_2\beta_1 \\ 2\alpha_2\beta_1\beta_2 - \gamma\alpha_1\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Bien sûr, on peut retrouver cet équilibre de façon plus géométrique puisqu'il correspond à l'intersection des courbes de réaction des firmes 1 et 2 (qui sont ici simplement des droites affines) : il s'agit donc d'égaliser les fonctions de réaction des deux entreprises dans le modèle de Cournot. \square

De façon analogue, en annulant les dérivées des fonctions de profit des firmes 1 et 2 dans le modèle de Bertrand, données respectivement par $\Pi_1^{(p)}(p_1, p_2) := (a_1 - b_1 p_1 + c p_2)p_1$ et $\Pi_2^{(p)}(p_1, p_2) := (a_2 + c p_1 - b_2 p_2)p_2$, on aboutit à l'équilibre en prix suivant, que l'on désignera par p^B :

$$p^B = \frac{1}{4\beta_1\beta_2 - c^2} \begin{pmatrix} 2a_1b_2 + a_2c \\ 2a_2b_1 + a - 1c \end{pmatrix}.$$

La quantité correspondante dans le modèle de Bertrand est alors donnée par $q^B = A^{-1}(p^B - \alpha)$, soit encore :

$$q^B = \frac{1}{4\beta_1\beta_2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 2a_1b_1b_2 + a_2b_1c \\ 2a_2b_1b_2 + a - 1b_2c \end{pmatrix}.$$

Puisque D et Δ sont inverses l'une de l'autre, il est clair que $p^B = p^C$ si et seulement si $q^B = q^C$. Rajoutons qu'il découle des formules précédentes que

$$p^C - p^B = \frac{\gamma^2}{4\beta_1\beta_2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

– Cas où $\gamma = 0$ (marchés indépendants).

On observe alors que $p^C = p^B$, donc aussi $q^C = q^B$. Les deux équilibres sont parfaitement identiques.

– Cas où $\gamma \neq 0$.

Alors $p^B = p^C$ si et seulement si $\alpha = 0$. En général, on n'a donc pas égalité entre p^C et p^B ou encore entre q^C et q^B .

Néanmoins, on voit apparaître le degré de différenciation des produits $\frac{\gamma^2}{\beta_1\beta_2}$ introduit par Singh et Vives (voir référence [10]) puisque nous avons aussi

$$p^C - p^B = \frac{1}{4\frac{\beta_1\beta_2}{\gamma^2} - 1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que plus les biens sont différenciés, plus les prix aux équilibres de Cournot et de Bertrand sont espacés.

On observe que dans ce modèle linéaire bien particulier (où l'on a supposé les coûts marginaux nuls), il existe un unique équilibre de Cournot en quantité q^C et un unique équilibre de Bertrand en prix p^B .

Terminons ce paragraphe en nous demandant ce qu'il advient si l'une des deux firmes choisit la quantité comme variable stratégique et l'autre firme le prix. On supposera $\gamma \neq 0$ et $\delta \neq 0$.

Par exemple, supposons que la firme 1 choisisse la stratégie de quantité et que la firme 2 choisisse la stratégie de prix.¹³ Dans ce cas, la firme 1 doit maximiser $\Pi_1^{(Q,P)}(q_1, q_2) := q_1(\alpha_1 - \beta_1q_1 - \gamma q_2)$ sous la contrainte que $f(q_1, q_2) := \alpha_2 - \gamma q_1 - \beta_2 q_2 - p_2 = 0$.

Supposons que la restriction de $\Pi_1^{(q,p)}$ à la sous-variété d'équation $f(q_1, q_2) = 0$ admette un extremum relatif en $q := (q_1, q_2)$. Les fonctions en jeu étant supposées suffisamment régulières et $d_{(q_1, q_2)}f \neq 0$,¹⁴ le théorème des extrema liés garantit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$d_q \Pi_1^{(Q,P)} = \lambda d_q f.$$

La résolution du système qui en découle conduit à

$$\lambda = \frac{\gamma^2(\alpha_2 - p_2) - \gamma\alpha_1\beta_2}{2\beta_2\delta}.$$

De cela, on déduit alors :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\gamma(p_2 - \alpha_2) + \alpha_1\beta_2}{2\delta} \\ q_2 = \frac{\alpha_2 - \gamma q_1 - p_2}{\beta_2} \end{cases}.$$

La firme 2 doit quant à elle maximiser $\Pi_2^{(Q,P)}(p_1, p_2) := p_2(a_2cp_1 - b_2p_2)$ sous la contrainte que $g(p_1, p_2) := a_1 - b_1p_1 + cp_2 - q_1 = 0$. A nouveau, on suppose que la restriction de $\Pi_2^{(Q,P)}$ à la sous-variété d'équation $g(p_1, p_2) = 0$ admet un extremum relatif en (p_1, p_2) . En utilisant cette fois la dualité mise en évidence précédemment, il vient :

$$\begin{cases} p_2 = \frac{-c(q_1 - a_1) + a_2b_1}{2d} \\ p_1 = \frac{a_1 + cp_2 - q_1}{b_1} \end{cases},$$

13. Singh et Vives font le raisonnement dans le cas où les deux firmes jouent le rôle opposé et donnent un résultat avec les lettres latines. Nous proposons ici un calcul d'extrema liés et donnons un résultat avec les lettres grecques.

14. Les notations $d_x f$, df_x , $D_x f$ ou encore Df_x désignent la différentielle de f au point x .

et notamment $p_2 = \frac{\alpha_2\beta_1\beta_2 - \gamma^2\alpha_2 - q_1\gamma\delta}{2\delta}$, en remplaçant les lettres latines par les lettres grecques.

Les deux systèmes précédents conduisent en réarrangeant les termes au système suivant d'inconnue (q_1, p_2) :

$$\begin{cases} 2\delta q_1 - \gamma p_2 = \alpha_1\beta_1 - \gamma\alpha_2 \\ \gamma q_1 + 2p_2 = \alpha_2 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est $\tilde{\delta} := 4\delta + \gamma^2 = 4\beta_1\beta_2 - 3\gamma^2$. Lorsqu'il est non nul, on obtient les expressions suivantes de q_1 et p_2 qui caractérisent alors l'unique équilibre de Nash correspondant à la situation décrite :

$$q_1 = \frac{2\alpha_1\beta_1 - \gamma\alpha_2}{\tilde{\delta}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{2\alpha_2\beta_1\beta_2 - \gamma^2\alpha_2 - \gamma\alpha_1\beta_2}{\tilde{\delta}}.$$

(On a pris soin de remplacer δ par sa valeur $\beta_1\beta_2 - \gamma^2$.)

A partir de cela, il n'est plus difficile d'obtenir les expressions de q_2 et de p_1 qui correspondent à cet équilibre. On trouve :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\delta}{\beta_2} q_1 \\ q_2 = \frac{1}{\beta_2} p_2 \end{cases}.$$

Notant $\Pi_i^{(P,Q)}$ la fonction de profit de l'entreprise i dans le cas où l'entreprise 1 choisit le prix comme variable stratégique et l'entreprise 2 choisit la quantité comme variable stratégique, on obtient par symétrie des rôles joués par 1 et 2 les expressions caractérisant l'unique équilibre de Nash correspondant.

Les notations pour les valeurs des quatre fonctions de paiement de la firme i à l'équilibre de Nash correspondantes aux quatre situations possibles (selon le choix de la variable stratégique pour les deux firmes) apparaissent dans le tableau suivant.

<i>firme 1</i> \ <i>firme 2</i>	quantité	prix
quantité	$\Pi_i^{(Q,Q)} := \Pi_i^C$	$\Pi_i^{(Q,P)}$
prix	$\Pi_i^{(P,Q)}$	$\Pi_i^{(P,P)} := \Pi_i^B$

Notons que Singh et Vives ont montré des inégalités entre ces différentes valeurs selon que les deux biens sont substituables ou complémentaires. Ainsi,

- Si les biens sont substituables, $\Pi_i^C > \Pi_i^{(Q,P)} > \Pi_i^B > \Pi_i^{(P,Q)}$
- Si les biens sont complémentaires, $\Pi_i^B > \Pi_i^{(P,Q)} > \Pi_i^C > \Pi_i^{(Q,P)}$.

De cela, on déduit l'important résultat que si les biens sont substituables, la stratégie dominante pour chaque firme est de retenir la quantité comme variable stratégique et qu'au contraire, si les biens sont complémentaires, il est préférable de choisir le prix comme variable stratégique.

La situation symétrique correspondante dans le cas de N firmes. Le cas où les fonctions de demande et de demande inverse sont linéaires se généralise sans problème au cas de N firmes, où N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

A l'instar de Vives dans [13], nous traiterons la version symétrique généralisée en prenant pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et pour tout vecteur de quantités de bien produites par les différentes firmes $q := (q_1, \dots, q_N)$ les fonctions coordonnées de demande inverse d'expression $\Delta_i(q) = \alpha - \beta q_i - \gamma \sum_{j \neq i} q_j$, avec $\beta > \gamma > 0$ et $\alpha > 0$.

Cela se réécrit bien sûr matriciellement¹⁵ sous la forme $\Delta(q) = \tilde{\alpha} - \tilde{A}q$, avec

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \cdots & \gamma \\ \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma \\ \gamma & \cdots & \gamma & \beta \end{bmatrix}.$$

Lemme 2 *Le déterminant de la matrice \tilde{A} a pour expression*

$$\det \tilde{A} = (\beta - \gamma)^{N-1} (\beta + (N-1)\gamma).$$

Démonstration

Considérons la fonction de deux variables $\tilde{\delta}$ définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \setminus \{\gamma\} \times \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\delta}(x, t) = \begin{vmatrix} \beta + t & x + t & \cdots & x + t \\ \gamma + t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x + t \\ \gamma + t & \cdots & \gamma + t & \beta + t \end{vmatrix}.$$

Désignant de manière générique pour un déterminant quelconque C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne et L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de ce déterminant, les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ sur $\tilde{\delta}(x, t)$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ qui laissent la valeur du déterminant inchangée montre qu'il existe des réels r et s dépendant de x tels que $\forall t, \tilde{\delta}(x, t) = rt + s$.

Remplaçant t par $-\gamma$ d'une part puis par $-x$ d'autre part (les déterminants sont alors chaque fois triangulaires), ce qui fournit les expressions de r et s , on arrive à :

$$\tilde{\delta}(x, t) = \frac{(\beta - \gamma)^n(t + x) - (\beta - x)^N(t + \gamma)}{x - \gamma}.$$

D'où on tire

$$\forall x \neq \gamma, \tilde{\delta}(x, 0) = \frac{(\beta - \gamma)^n x - (\beta - x)^N \gamma}{x - \gamma}.$$

Puisque $A = \lim_{x \rightarrow \gamma} \begin{bmatrix} \beta & x & \cdots & x \\ \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ \gamma & \cdots & \gamma & \beta \end{bmatrix}$ et par continuité de l'application $\det : M \mapsto \det M$ (car $\det M$ est un polynôme

en les coefficients de M), il vient finalement

$$\det \tilde{A} = \lim_{x \rightarrow \gamma} \tilde{\delta}(x, 0).$$

Il reste alors à observer que

$$\tilde{\delta}(x, 0) = (\beta - \gamma)^N - \gamma \frac{(\beta - x)^N - (\beta - \gamma)^N}{x - \gamma}$$

et à remarquer que la dernière fraction n'est autre qu'un taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto (\beta - x)^N$, dérivable en γ , de dérivée $-N(\beta - \gamma)^{N-1}$ en γ . ■

On supposera dorénavant $\beta + \gamma(N-1) \neq 0$ de sorte que la matrice \tilde{A} soit inversible.

Alors la fonction de demande D qui prend pour entrée un vecteur de prix p est donnée par $D(p) = \tilde{A}^{-1}(\tilde{\alpha} - p)$.

Désignons à présent par I_N la matrice identité de taille $N \times N$ et par J_N la matrice de même taille contenant uniquement des 1.

Avec ces notations, il est commode d'écrire $\tilde{A} = (\beta - \gamma)I_N + \gamma J_N$. Cela permet d'obtenir aisément le lemme suivant.

15. La matrice \tilde{A} considérée est récurrente dans la littérature puisqu'elle apparaît également dans l'article [2] de Rabah Amir, Philip Erickson et Jim Jin avec $\beta = 1$.

Il faut noter que cette matrice découle de la considération de la fonction d'utilité quadratique

$$U(q) := \alpha \sum_{i=1}^N q_i - \frac{1}{2} \left(\beta \sum_{i=1}^N q_i^2 + 2\gamma \sum_{j \neq i} q_i q_j \right).$$

Lemme 3 L'inverse de \tilde{A} est donné par $\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\beta - \gamma} I_N - \frac{\gamma}{(\beta - \gamma)(\beta + (N - 1)\gamma)} J_N$.

Démonstration

Il suffit comme l'ont fait d'ailleurs les auteurs de [2] de considérer une matrice $M = \mu I_N + \nu J_N$, de remarquer que $J_N^2 = N J_N$ et de résoudre l'équation $\tilde{A}M = I_N$ en identifiant les termes devant I_N et J_N (cela est justifié pour $N \geq 2$ par le fait que $\{I_N, J_N\}$ est un système libre du \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées de taille N réelles). Cela permet de trouver les expressions de μ et ν . ■

On obtient à partir du lemme précédent les expressions des fonctions coordonnées de demande $D_i(p) = a - bp_i + c \sum_{j \neq i} p_j$ puisqu'on trouve :

1. $a = \frac{\alpha}{\beta + (N - 1)\gamma}$ à partir de $\tilde{A}^{-1}(\tilde{\alpha})$
2. $b = \frac{\beta + (N - 2)\gamma}{(\beta + (N - 1)\gamma)(\beta - \gamma)}$ et $c = \frac{\gamma}{(\beta + (N - 1)\gamma)(\beta - \gamma)}$, à partir de $\tilde{A}^{-1}p$.

Examinons à présent les équilibres associés à la situation étudiée (les coûts marginaux des firmes sont supposés encore une fois nuls).

Nous montrons tout de suite que l'hypothèse $\beta > \gamma > 0$ est suffisante pour assurer la stricte concavité de la fonction d'utilité U décrite dans une note précédente ou encore pour assurer l'existence d'un équilibre.

S'inspirant d'Amir, d'Erickson et de Jin, le lemme suivant établit en outre une condition nécessaire et suffisante sur γ et β pour que la matrice \tilde{A} soit définie positive.

Lemme 4 Supposant seulement $\beta > 0$ et $|\gamma| < \beta$, la matrice \tilde{A} est définie positive si et seulement si l'inégalité $\frac{-\beta}{n-1} < \gamma < \beta$ est vérifiée.

Démonstration

La matrice \tilde{A} étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. La matrice est donc définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Or trouver les valeurs propres λ de \tilde{A} revient à résoudre l'équation $\det(\tilde{A} - \lambda I_N) = 0$; or changeant β en $\beta - \lambda$, la démonstration du lemme 2 est toujours valide, ce qui donne la valeur du déterminant $\det(\tilde{A} - \lambda I_N)$. ■

Remarque

Au vu de la matrice \tilde{A} et du calcul de son déterminant fait au lemme 2 qui est valable pour tout N , donc en particulier pour tout $1 \leq p \leq N$, le critère de Sylvester permet immédiatement d'affirmer sous les mêmes hypothèses que celles du lemme précédent que A est définie positive si et seulement si $\beta + (N - 1)\gamma > 0$. □

La fonction de profit de la firme $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ dans le modèle de Cournot s'exprime par $\Pi_i^{(C)}(q) = \Delta_i(q)q_i$.

Avec $\forall i, \forall q, \frac{\partial \Pi_i^{(C)}}{\partial q_i}(q) = \alpha - 2\beta q_i - \gamma \sum_{j \neq i} q_j$, nous avons $\forall i, \frac{\partial \Pi_i^{(C)}}{\partial q_i}(q) = 0$ si et seulement si $\tilde{B}q = \tilde{\alpha}$, où

$$\tilde{B} := \begin{bmatrix} 2\beta & \gamma & \cdots & \gamma \\ \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma \\ \gamma & \cdots & \gamma & 2\beta \end{bmatrix}.$$

Le lemme 2 permet d'affirmer que $\det \tilde{B} = (2\beta - \gamma)^N (2\beta + (N - 1)\gamma)$. Par hypothèse sur γ et β , la matrice \tilde{B} est donc inversible, ce qui conduit à l'unique possibilité d'équilibre en quantités :

$$q^C = \tilde{B}^{-1}\tilde{\alpha}.$$

Notons que puisque $\frac{\partial^2 \Pi_i^{(C)}}{\partial q_i \partial q_j}(q^C) = \begin{cases} -2\beta & \text{si } i = j \\ -\gamma & \text{si } i \neq j \end{cases}$, pour tout i , la matrice de terme général $\frac{\partial^2 \Pi_i^{(C)}}{\partial q_i \partial q_j}(q^C)$ est définie négative d'après le lemme 4. Ainsi q^C est bien un équilibre en quantités et c'est l'unique équilibre de Cournot (en

quantités) correspondant à la situation étudiée.

Ensuite, nous avons par définition de la fonction de demande inverse :

$$\begin{aligned} p^C &= \tilde{\alpha} - \tilde{A}q^C \\ &= \tilde{\alpha} - \tilde{A}\tilde{B}^{-1}\tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

On avait précédemment $\tilde{A}^{-1}\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}}{\beta + (N-1)\gamma}$; le changement de β en 2β fournit donc $\tilde{B}^{-1}\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}}{2\beta + (N-1)\gamma}$.

Un simple calcul matriciel donne $\tilde{A}\tilde{\alpha} = (\beta + (N-1)\gamma)\tilde{\alpha}$ si bien que $\tilde{A}\tilde{B}^{-1}\tilde{\alpha} = \frac{\beta + (N-1)\gamma}{2\beta + (N-1)\gamma}\tilde{\alpha}$ et finalement

$$q^C = \frac{1}{2\beta + (N-1)\gamma}\tilde{\alpha} \quad \text{et} \quad p^C = \frac{\beta}{2\beta + (N-1)\gamma}\tilde{\alpha}.$$

Dans le modèle de Bertrand, la fonction de profit de la firme i s'exprime par $\Pi_i^{(B)}(p) = D_i(p)p_i$. Là encore, la dualité prix-quantité à travers le basculement lettres latines/lettres grecques permet d'éviter de refaire deux fois les mêmes calculs. On obtient un unique équilibre de Bertrand (en prix) donné par :

$$p^B = \frac{1}{2b - (N-1)c}\tilde{a} \quad \text{et} \quad q^B = \frac{b}{2b - (N-1)c}\tilde{a},$$

où \tilde{a} désigne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$.

Remplaçant \tilde{a} , b et c par leurs expressions en fonction de $\tilde{\alpha}$, β et γ , il vient

$$p^B = \frac{\beta - \gamma}{2\beta + (N-3)\gamma}\tilde{\alpha},$$

puis la différence entre les prix à l'équilibre de Cournot et à l'équilibre de Bertrand :

$$p^C - p^B = \frac{N-1}{\left(2\frac{\beta}{\gamma} + N-1\right)\left(2\frac{\beta}{\gamma} + N-3\right)}\tilde{\alpha}.$$

On voit donc que dans le cas de N firmes, la différence $p^C - p^B$ augmente lorsque le degré de substituabilité des biens $\frac{\gamma}{\beta}$ augmente.¹⁶

Pour achever l'exemple étudié et en même temps la deuxième partie de l'exercice 6.9 figurant dans l'ouvrage [13] de Vives, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} p^B &= \frac{\beta - \gamma}{\gamma}\tilde{\alpha} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} p^C &= \frac{\beta}{\gamma}\tilde{\alpha} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} (p^C - p^B) &= \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

Notons que si l'on avait supposé les coûts marginaux constants à m , les prix à l'équilibre de Bertrand et de Cournot tendraient vers m , également à la vitesse $\frac{1}{N}$.

Dans cette partie consacrée au cas linéaire, on a donc pu mettre en évidence une réelle dualité entre la concurrence à la Cournot et à la Bertrand (en l'occurrence le prix à l'équilibre de Bertrand se comporte comme la quantité à l'équilibre de Cournot). On aura toutefois noté qu'en général, les équilibres de Cournot et de Bertrand sont différents, mais tous les deux uniques dans cette situation où les fonctions de demande et de demande inverse ont une

16. Notons qu'on retrouve le cas symétrique correspondant à $N = 2$ qui était un cas particulier de l'étude précédente.

structure linéaire.

On peut se demander dès lors si, pour des fonctions de demande et de coût plus générales, à chaque équilibre de Cournot correspond encore un équilibre de Bertrand et réciproquement.

2.4 Condition suffisante d'équivalence des équilibres en quantité et en prix pour un oligopole avec un seul bien, cas de fonctions de demande générales.

Nous généralisons ici l'exemple des systèmes de demande et de demande inverse linéaires à des systèmes de demande et de demande inverse quelconques.

2.4.1 Cas du duopole

Dans ce paragraphe, on considère deux firmes 1 et 2 produisant chacune un bien donné. Comme d'habitude, on notera q_1 et q_2 les variables dans $[0, +\infty[$ référant aux quantités de biens produits et C_1 et C_2 les fonctions de coût de production pour les firmes 1 et 2 respectivement.

On notera

$$D : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 & \rightarrow & (\mathbb{R}_+)^2 \\ (p_1, p_2) & \mapsto & D(p_1, p_2) =: (D_1(p_1, p_2), D_2(p_1, p_2)) \end{array}$$

la fonction de demande (qui à un vecteur de prix (p_1, p_2) associe un certain vecteur de quantités $D(p_1, p_2)$). On notera de même

$$\Delta : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 & \rightarrow & (\mathbb{R}_+)^2 \\ (q_1, q_2) & \mapsto & \Delta(q_1, q_2) =: (\Delta_1(q_1, q_2), \Delta_2(q_1, q_2)) \end{array}$$

la fonction de demande inverse.

On supposera que D et Δ sont bijectives, inverses l'une de l'autre, et de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$.¹⁷

L'étude de la situation de duopole peut ici être décrite par le biais des quantités (q) ou des prix (p).

Si la variable stratégique est q , on notera $\Pi_i^{(C)}$ la fonction de paiement de la firme $i \in \{1, 2\}$.

Si la variable stratégique est p , on notera $\Pi_i^{(B)}$ cette fonction.

On rappelle que leurs expressions sont données par les formules suivantes :

pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{cases} \Pi_i^{(C)}(q_1, q_2) = q_i \Delta_i(q_1, q_2) - C_i(q_i) \\ \Pi_i^{(B)}(p_1, p_2) = p_i D_i(p_1, p_2) - C_i(D_i(p_1, p_2)) \end{cases}.$$

Supposons que $q^* := (q_1^*, q_2^*)$ soit un équilibre en quantités ; notons $p^* := (p_1^*, p_2^*) := \Delta(q_1^*, q_2^*)$. On a bien sûr en inversant $q^* = D(p^*)$.

Alors (q_1^*, q_2^*) vérifie le système d'équations du premier ordre suivant

$$S^{(q)} := \begin{cases} p_1^* + D_1(p^*) \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1}(D(p^*)) = C_1'(D_1(p^*)) \\ p_2^* + D_2(p^*) \frac{\partial \Delta_2}{\partial q_2}(D(p^*)) = C_2'(D_2(p^*)) \end{cases}$$

ainsi que la condition du second ordre suivante :

$$\Sigma^{(q)} := \left\{ \forall i \in \{1, 2\}, 2 \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) + D_i(p^*) \frac{\partial^2 \Delta_i}{\partial q_i^2}(D(p^*)) - C_i''(D_i(p^*)) \leq 0. \right.$$

De la même façon, si (p_1^*, p_2^*) est un équilibre en prix, les conditions suivantes du premier ordre

$$S^{(p)} := \begin{cases} D_1(p^*) + p_1^* \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(p^*) = \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(p^*) C_1'(D_1(p^*)) \\ D_2(p^*) + p_2^* \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(p^*) = \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(p^*) C_2'(D_2(p^*)) \end{cases}$$

17. On dit dans ce cas que D réalise un \mathcal{C}^2 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même, de difféomorphisme réciproque Δ .

et du second ordre

$$\Sigma^{(p)} := \left\{ \forall i \in \{1, 2\}, 2 \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + p_i \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) - \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) C'_i(D_i(p^*)) - \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \right)^2 C''_i(D_i(p^*)) \leq 0 \right.$$

sont satisfaites.

Cherchons une hypothèse sous laquelle les systèmes $S^{(q)}$ et $S^{(p)}$, fournissant les conditions de premier ordre, sont équivalents.

Multipliant la ligne i de $S^{(q)}$ par $\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*)$ pour $i \in \{1, 2\}$, il vient

$$S^{(q)} \implies \begin{cases} p_1^* \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(p^*) + D_1(p^*) \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(p^*) \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1}(D(p^*)) = C'_1(D_1(p^*)) \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(p^*) \\ p_2^* \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(p^*) + D_2(p^*) \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(p^*) \frac{\partial \Delta_2}{\partial q_2}(D(p^*)) = C'_2(D_2(p^*)) \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(p^*) \end{cases}.$$

Ce dernier système est donc très proche du système $S^{(p)}$.

Notant $d_{p^*}D$ (respectivement $d_{D(p^*)}\Delta$) les différentielles de D (respectivement Δ) au point p^* (respectivement $D(p^*)$), l'identité $\Delta \circ D = \text{Id}_{(\mathbb{R}^+)^2}$ fournit par différenciation au point p^* la relation

$$d_{D(p^*)}\Delta \circ d_{p^*}D = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

entre applications linéaires. Matriciellement, cela donne (en omettant les points p^* et $D(p^*)$ en lesquels s'appliquent les dérivées partielles) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial p_1} & \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial D_2}{\partial p_1} & \frac{\partial D_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On déduit de la discussion précédente la proposition suivante.

Proposition 7 *Soit un couple (p^*, q^*) constitué d'éléments de $(\mathbb{R}^+)^2$ tels que $p^* = \Delta(q^*)$. Les équations du premier ordre en quantités et en prix sont équivalentes si et seulement si*

$$\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1,$$

ou encore

$$\forall i \neq j \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p^*) \frac{\partial \Delta_j}{\partial q_i}(D(p^*)) = 0.$$

Remarques

- Insistons sur le fait que la condition nécessaire et suffisante de la proposition suivante n'est pas automatique. Comme explicité matriciellement ci-dessus, cette condition ne découle notamment pas directement de la relation $D \circ \Delta = \text{Id}$.
- Les calculs traités dans le cas de deux firmes montrent que pour la situation du monopole ($n = 1$), les conditions du premier ordre en quantités et en prix sont toujours équivalentes. \square

Cherchons à présent une condition sous laquelle les systèmes $\Sigma^{(q)}$ et $\Sigma^{(p)}$ sont équivalents. On suppose évidemment déjà que les conditions du premier ordre en quantités et en prix sont équivalentes, autrement dit que

$$\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1.$$

En multipliant l'expression du système $\Sigma^{(q)}$ correspondant à la firme i par $\left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \right)^2 > 0$ et en utilisant l'hypothèse précédente, il vient :

$$\Sigma^{(q)} \iff \forall i \in \{1, 2\}, 2 \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + D_i(p^*) - \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \right)^2 C''_i(D_i(p^*)) \leq 0.$$

De cela, on déduit la proposition suivante.

Proposition 8 Soit un couple (p^*, q^*) constitué d'éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $p^* = \Delta(q^*)$ et vérifiant des conditions du premier ordre équivalentes. Alors p^* et q^* vérifient des conditions du second ordre équivalentes si et seulement si

$$\forall i \in \{1, 2\}, (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \right) = 0.$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que, d'une part, les systèmes $\Sigma^{(q)}$ et $\Sigma^{(p)}$ sont équivalents si et seulement si $\forall i \in \{1, 2\}, D_i(p^*) = (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*)$ et que, d'autre part, la condition du premier ordre pour la firme i fournit l'égalité $D_i(p^*) = -(p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*)$. ■

On peut finalement résumer les résultats précédents dans une nouvelle proposition qui fournit une condition suffisante pour avoir l'équivalence entre équilibre en quantité et équilibre en prix.

Proposition 9 Soit un couple (p^*, q^*) constitué d'éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $p^* = \Delta(q^*)$. On suppose que les deux assertions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1$
2. $\forall i \in \{1, 2\}, (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \right) = 0.$

Alors q^* est un équilibre en quantités si et seulement si p^* est un équilibre en prix.

Remarque

La condition suffisante de la proposition précédente a toutefois le défaut de ne considérer qu'un certain couple (p^*, q^*) ; la condition est en quelque sorte "locale". La proposition précédente ne dit pas que l'ensemble des équilibres en quantités et l'ensemble des équilibres en prix du duopole considéré sont en correspondance bijective. Aussi, il se pourrait qu'il n'y ait pas le même nombre d'équilibres en prix que d'équilibres en quantités.

Néanmoins, si tout équilibre en quantités q^* vérifie la condition suffisante de la proposition précédente, une telle correspondance bijective aura lieu; c'est l'objet du théorème ci-dessous. □

Notons \mathcal{E}_q (respectivement \mathcal{E}_p) l'ensemble des équilibres en quantités (respectivement en prix) pour le duopole considéré.

THÉORÈME 2.1 —

– Si tout équilibre en quantités $q^* \in \mathcal{E}_q$ vérifie

1. $\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1$
2. $\forall i \in \{1, 2\}, (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \right) = 0,$

où l'on a noté p^* l'image de q^* par l'application Δ , alors l'application Δ induit une bijection de \mathcal{E}_q sur \mathcal{E}_p .

– Si tout équilibre en prix $p^* \in \mathcal{E}_p$ vérifie

1. $\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1$
2. $\forall i \in \{1, 2\}, (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \right) = 0,$

alors l'application D induit une bijection de \mathcal{E}_p sur \mathcal{E}_q .

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la proposition 9. ■

Avant d'étendre la situation au cas de N firmes, on donne maintenant des exemples de fonctions D et Δ inspirées du paragraphe 2.3.2 et de fonctions de coût pour lesquelles les hypothèses de la proposition 9 sont satisfaites.

Considérons des réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et des réels γ_1, γ_2 tels que $\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 \neq 0$. On définit alors l'application

$$\begin{aligned} \Delta : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (q_1, q_2) &\mapsto (\alpha_1 - \beta_1 q_1 - \gamma_1 q_2, \alpha_2 - \gamma_2 q_1 - \beta_2 q_2) \end{aligned}$$

qui réalise un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans lui-même. On note comme d'habitude $D = \Delta^{-1}$. Les fonctions de demande et de demande inverse s'obtiennent en restreignant D et Δ à des ouverts convenables de \mathbb{R}^2 .

Soient $q^* \in \mathbb{R}$ et $p^* := D(q^*)$. Un calcul de dérivées partielles montre immédiatement que la condition suivante d'équivalence des systèmes de premier ordre en quantité et en prix vérifiés respectivement par q^* et par p^*

$$\forall i \neq j \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p^*) \frac{\partial \Delta_j}{\partial q_i}(q^*) = 0$$

est satisfaite si et seulement si $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$.¹⁸ Notons que dans ce cas, la condition $\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 \neq 0$ est réduite à $\beta_1\beta_2 \neq 0$, ce que l'on suppose déjà. De surcroît, l'étude du modèle linéaire faite au paragraphe 2.3.2 montre en particulier qu'il existe un unique équilibre (p^*, q^*) qui vérifie à la fois les conditions de premier ordre de Cournot et de Bertrand, et qui est donné par $p^* = \left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}\right)$ et $q^* = \left(\frac{\alpha_1}{2\beta_1}, \frac{\alpha_2}{2\beta_2}\right)$.

Ensuite, comme on a ici $\forall i \in \{1, 2\}, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \neq 0$, on a équivalence entre les conditions du second ordre pour p^* et q^* si et seulement si $\forall i \in \{1, 2\}, p_i^* = C'_i(D_i(p^*))$, si et seulement si

$$\begin{cases} C'_1\left(\frac{\alpha_1}{2\beta_1}\right) = \frac{\alpha_1}{2} \\ C'_2\left(\frac{\alpha_2}{2\beta_2}\right) = \frac{\alpha_2}{2} \end{cases}.$$

Les expressions suivantes de C_i remplissent les conditions précédentes.

1. $C_i(x) = \frac{\beta_i}{2}x^2$
2. $C_i(x) = \frac{\alpha_i}{2}x$
3. $C_i(x) = \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i} \ln x$ (à condition que $x > 0$)
4. Pour $s > 0$, $C_i(x) = \frac{1}{s}\beta_i^{s-1} \left(\frac{2}{\alpha_i}\right)^{s-2} x^s$.

2.4.2 Cas de N firmes

Les résultats montrés précédemment pour le duopole s'étendent au cas de N firmes, où $N \geq 2$.

Les applications D et Δ , cette fois-ci définies de $(\mathbb{R}_+)^N$ dans $(\mathbb{R}_+)^N$, sont supposées avoir les mêmes régularités qu'au paragraphe précédent.

En réécrivant les mêmes systèmes avec cette fois N lignes, on a encore la proposition suivante.

Proposition 10 *Soit un couple (p^*, q^*) constitué d'éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^N$ tels que $p^* = \Delta(q^*)$. On suppose que les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

1. $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_i}(D(p^*)) = 1$
2. $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, (p_i^* - C'_i(D_i(p^*))) \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_i}(p^*) + \frac{\partial^2 D_i}{\partial p_i^2}(p^*) \right) = 0$.

Alors q^* est un équilibre en quantités si et seulement si p^* est un équilibre en prix.

De même, on pourrait énoncer un théorème analogue au théorème 2.1.

18. Dans la situation du paragraphe 2.3.2, ce cas correspond à $\gamma = 0$, soit encore au cas où les marchés sont indépendants.

2.5 Une extension au cas de nombres quelconques de firmes et de biens

Proposons dans ce paragraphe le modèle du paragraphe précédent, étendu au cas où N entreprises (numérotées de 1 à N) produisent J biens (numérotés de 1 à J).

Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, J \rrbracket$, notons q_{ij} la variable générique désignant la quantité de biens j produits par l'entreprise i et p_{ij} la variable générique désignant le prix unitaire du bien j fixé par l'entreprise i .

On notera p la matrice générique (p_{ij}) et q la matrice des q_{ij} (chacune de taille $N \times J$).

Notant $\mathcal{M}_{N,J}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel formé de l'ensemble des matrices réelles à N lignes et J colonnes, on suppose qu'il existe \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux ouverts de $\mathcal{M}_{N,J}(\mathbb{R})$ et D un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathcal{P} sur \mathcal{Q} , qui à chaque $p \in \mathcal{P}$ associe une matrice de quantités de terme général noté $D_{ij}(p)$; ainsi D est la fonction de demande caractérisant la situation étudiée. On note Δ le difféomorphisme réciproque (ou encore fonction de demande inverse), envoyant tout $q \in \mathcal{Q}$ sur une matrice de prix de terme général noté $\Delta_{ij}(q)$.¹⁹

Enfin, on suppose que chaque firme i a une fonction de coût C_i à J variables (qui correspondent aux quantités des J biens produites par i).

La fonction de profit de la firme i prend donc l'expression :

$$- \Pi_i^{(C)}(q) = \sum_{j=1}^J q_{ij} \Delta_{ij}(q) - C_i(q_{i1}, \dots, q_{iJ}) \text{ dans le modèle de Cournot,}$$

$$- \Pi_i^{(B)}(q) = \sum_{j=1}^J p_{ij} D_{ij}(p) - C_i(D_{i1}(p), \dots, D_{iJ}(p)) \text{ dans le modèle de Bertrand.}$$

Le couple $(p^*, q^*) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ tel que $q^* = D(p^*)$ vérifie les conditions du premier ordre si et seulement s'il vérifie le système

$$- S^{(C)} := \left\{ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, J \rrbracket, \frac{\partial \Pi_i^{(C)}}{\partial q_{ik}}(q^*) = 0 \text{ dans le modèle de Cournot,} \right.$$

$$\left. - S^{(B)} := \left\{ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, J \rrbracket, \frac{\partial \Pi_i^{(B)}}{\partial p_{ik}}(p^*) = 0 \text{ dans le modèle de Bertrand.} \right. \right.$$

Un calcul de dérivées fournit alors

$$S^{(C)} \iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, J \rrbracket, \Delta_{ik}(q^*) + \sum_{j=1}^J q_{ij}^* \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial q_{ik}}(q^*) = \frac{\partial C_i}{\partial q_{ik}}(q_{i1}^*, \dots, q_{iJ}^*),$$

et

$$S^{(B)} \iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, J \rrbracket, D_{ik}(p^*) + \sum_{j=1}^J p_{ij}^* \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) = \sum_{j=1}^J \frac{\partial C_i}{\partial q_{ij}}(D_{i1}(p^*), \dots, D_{iJ}(p^*)) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*).$$

Utilisant que $q^* = D(p^*)$, il vient :

$$S^{(C)} \iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket, p_{ij}^* + \sum_{l=1}^J D_{il}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) = \frac{\partial C_i}{\partial q_{ij}}(q_{i1}^*, \dots, q_{iJ}^*).$$

Pour i et j fixés, pour $k \in \llbracket 1, J \rrbracket$, multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $\frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*)$, il vient

$$S^{(C)} \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall j, k \in \llbracket 1, J \rrbracket, p_{ij}^* \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) + \sum_{l=1}^J D_{il}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) = \frac{\partial C_i}{\partial q_{ij}}(q_{i1}^*, \dots, q_{iJ}^*) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*).$$

En sommant ensuite sur j pour i et k fixés, on a ainsi :

$$S^{(C)} \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, J \rrbracket, \sum_{j,l=1}^J D_{il}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) + \sum_{j=1}^J p_{ij}^* \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) = \sum_{j=1}^J \frac{\partial C_i}{\partial q_{ij}}(q_{i1}^*, \dots, q_{iJ}^*) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*).$$

19. Notons que cette hypothèse est très forte d'un point de vue pratique; en effet, on se doute que pour des quantités q_{ij} du même bien j produites ($1 \leq i \leq n$), les N firmes s'alignent sur le prix fixé à partir de ces q_{ij} .

On remarque alors que ce dernier système est équivalent au système $S^{(B)}$ si et seulement si :

$$\forall i, k, D_{ik}(p^*) = \sum_{j,l=1}^J D_{il}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*).$$

Cette dernière condition est par exemple vérifiée dès que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 2

$$\forall k, l \in \llbracket 1, J \rrbracket, \sum_{j=1}^J \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_{ik}}(p^*) = \delta_{kl},$$

où δ désigne ici le symbole de Kronecker, c'est-à-dire $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Inversement, on montre que sous l'hypothèse précédente, le système $S^{(B)}$ implique le système $S^{(C)}$. Rappelons d'abord que

$$S^{(B)} \iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall l \in \llbracket 1, J \rrbracket, D_{il}(p^*) + \sum_{k=1}^J p_{ik}^* \frac{\partial D_{ik}}{\partial p_{il}}(p^*) = \sum_{k=1}^J \frac{\partial C_i}{\partial q_{ik}}(D_{i1}(p^*), \dots, D_{iJ}(p^*)) \frac{\partial D_{ik}}{\partial p_{il}}(p^*).$$

Ensuite, pour i fixé, multipliant l'équation précédente correspondant au couple (i, l) par $\frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*))$ (et ce pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, puis sommant sur $l \in \llbracket 1, J \rrbracket$, on voit que le système $S^{(B)}$ conduit à :

$$\forall i, j, \sum_{k,l=1}^J p_{ik}^* \frac{\partial D_{ik}}{\partial p_{il}}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) + \sum_{l=1}^J D_{il}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) = \sum_{k,l=1}^J \frac{\partial C_i}{\partial q_{ik}}(D_{i1}(p^*), \dots, D_{iJ}(p^*)) \frac{\partial D_{ik}}{\partial p_{il}}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)).$$

Ces dernières $N \times J$ équations sont équivalentes au système $S^{(C)}$ si et seulement si

$$\forall i, j, \sum_{k,l=1}^J \left(p_{ik}^* - \frac{\partial C_i}{\partial q_{ik}}(D_{i1}(p^*), \dots, D_{iJ}(p^*)) \right) \frac{\partial D_{ik}}{\partial p_{il}}(p^*) \frac{\partial \Delta_{il}}{\partial q_{ij}}(D(p^*)) = p_{ij}^* - \frac{\partial C_i}{\partial q_{ij}}(D_{i1}(p^*), \dots, D_{iJ}(p^*)).$$

Or cela est vérifié sous l'hypothèse précédente.

Pour résumer, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 11 *Soit un couple (p^*, q^*) constitué d'éléments de $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ tels que $p^* = \Delta(q^*)$ et qui vérifient l'hypothèse 2. Alors q^* vérifie les conditions du premier ordre en quantités si et seulement si p^* vérifie les conditions du premier ordre en prix.*

Remarque

Là encore, comme déjà souligné au paragraphe 2.4 lorsqu'on supposait $N = 2$ et $J = 1$, il ne faudrait pas considérer que l'hypothèse 2 est automatiquement vérifiée par le fait que D et Δ sont inverses l'une de l'autre. \square

3 Equilibres oligopolistiques

Dans ce paragraphe, on essaie de faire le lien entre équilibres en quantité et en prix. Est-il possible d'associer, au moins sous certaines conditions, à tout équilibre en quantité un équilibre en prix ? Si cela est le cas, la correspondance est-elle biunivoque ?

On considère un ensemble de n firmes ($n \in \mathbb{N}^*$), chaque firme i fabriquant son produit spécifique. On suppose que le coût de production de l'entreprise i est décrit par une fonction de coût C_i continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $C_i(0) = 0$. Chaque firme i produit son bien en quantité $q_i \in [0, \infty[$ et affiche un prix p_i . Mais contrairement aux cas considérés jusqu'alors, les fonctions de prix et de quantité notées respectivement P et Q ne sont plus nécessairement sommes des p_i , respectivement des q_i ; on étudie ici le cas plus général où P et Q sont fonctions quelconques des p_i , respectivement des q_i , deux fois continûment dérivables et croissantes pour la relation d'ordre définie dans la première section. Enfin, on a toujours les fonctions de demande D et de demande inverse $\Delta = D^{-1}$ qui prennent respectivement en argument un prix (un élément parmi les valeurs prises par P) et une quantité (un élément parmi les valeurs prises par Q). On supposera que Δ et D sont des fonctions strictement décroissantes et dérivables.

Notation

On conserve les notations des deux sections précédentes ; par exemple, on notera p pour désigner le n -uplet (p_1, \dots, p_n) .

Aussi, on notera souvent $\partial_i P$ pour désigner la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial p_i}$. \square

Remarque

Par croissance des fonctions P et Q , pour tout i , les dérivées partielles $\partial_i P$ et $\partial_i Q$ sont des fonctions positives. \square

La fonction de profit de la firme i , qui dépend dans ce cadre général des deux variables stratégiques p et q , s'écrit alors dans le modèle fait par les auteurs de [4] :

$$\Pi_i(p, q) = \min\{p_i, P(p)\partial_i Q(q)\}q_i - C_i(q_i).$$

3.1 Equilibres, définitions et caractérisations.

Nous donnons à présent la définition d'équilibre oligopolistique correspondant à la situation étudiée et telle qu'introduite dans [4].

Définition *Un équilibre oligopolistique est un $2n$ -uplet (p^*, q^*) tel que :*

- $Q(q^*) = D(P(p^*))$,
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall p_i, q_i \geq 0, Q(q_i, q_{-i}^*) \leq D(P(p_i, p_{-i}^*)) \implies \Pi_i(p^*, q^*) \geq \Pi_i(p_i, p_{-i}^*, q_i, q_{-i}^*)$.

Remarque

On appellera dans la suite équilibre oligopolistique faible tout $2n$ -uplet précédent pour lequel l'égalité $Q(q^*) = D(P(p^*))$ n'est pas nécessairement vérifiée. \square

Le lemme suivant donne tout de suite deux conditions équivalentes permettant sous une certaine hypothèse de caractériser un équilibre oligopolistique (et donc aussi de caractériser un équilibre oligopolistique faible en supprimant l'égalité $Q(q^*) = D(P(p^*))$).

Lemme 5 *Considérons un $2n$ -uplet (p^*, q^*) de réels positifs.*

Si (p^, q^*) est un équilibre oligopolistique, alors les deux assertions suivantes équivalentes sont vérifiées.*

1. $\left\{ \begin{array}{l} Q(q^*) = D(P(p^*)) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) = \max_{(p_i, q_i) \in \mathbb{R}_+^2} \{p_i q_i - C_i(q_i) \mid p_i \leq P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) \text{ et } P(p_i, p_{-i}^*) \leq \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*))\} \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} Q(q^*) = D(P(p^*)) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) = \max_{(p_i, q_i) \in \mathbb{R}_+^2} \{p_i q_i - C_i(q_i) \mid q_i \leq Q(q_i, q_{-i}^*) \partial_i P(p_i, p_{-i}^*) \text{ et } Q(q_i, q_{-i}^*) \leq D(P(p_i, p_{-i}^*))\} \end{array} \right.$

En outre, si l'une des deux assertions ci-dessus est vérifiée et si $\forall i, p_i^ \leq P(p^*) \partial_i Q(q^*)$, alors (p^*, q^*) est un équilibre oligopolistique.*

Démonstration

Remarquons d'abord que les deux assertions (1) et (2) sont équivalentes par "symétrie" (ou dualité) des rôles joués par les quantités et les prix.

Supposons d'abord que (p^*, q^*) soit un équilibre oligopolistique et montrons qu'alors (1) est vérifiée. Par définition, $Q(q^*) = D(P(p^*))$. Supposons par l'absurde

$$\exists i, \exists (p_i, q_i) \in \mathbb{R}_+^2, \begin{cases} p_i \leq P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) & (i) \\ P(p_i, p_{-i}^*) \leq \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)) & (ii) \end{cases} \text{ et } p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) < p_i q_i - C_i(q_i).$$

Alors il vient avec l'inégalité (i)

$$p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) < \min\{p_i, P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)\} q_i - C_i(q_i),$$

puis

$$\Pi_i(p^*, q^*) < \Pi_i(p_i, p_i^*, q_i, q_{-i}^*).$$

Or, on a aussi selon l'inégalité (ii)

$$Q(q_i, q_{-i}^*) \leq D(P(p_i, p_{-i}^*))$$

par décroissance de D et puisque Δ et D sont inverses l'une de l'autre.

Cela contredit le fait que (p^*, q^*) soit un équilibre oligopolistique.

Réciproquement, on se donne (p^*, q^*) vérifiant la condition (1) et on suppose en plus $\forall i, p_i^* \leq P(p^*) \partial_i Q(q^*)$. Si (p^*, q^*) n'est pas un équilibre oligopolistique, alors

$$\exists i, \exists (p_i, q_i) \in \mathbb{R}_+^2, Q(q_i, q_{-i}^*) \leq D(P(p_i, p_{-i}^*)) \text{ et } \Pi_i(p^*, q^*) < \Pi_i(p_i, p_{-i}^*, q_i, q_{-i}^*).$$

Autrement dit, $P(p_i, p_{-i}^*) \leq \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*))$ et en utilisant l'hypothèse selon laquelle $p_i^* \leq P(p^*) \partial_i Q(q^*)$, il vient

$$p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) < \min\{p_i, P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)\} q_i - C_i(q_i).$$

Distinguons à présent les deux cas suivants :

– premier cas : $p_i \leq P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$

Alors

$$\begin{aligned} p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) &\geq p_i q_i - C_i(q_i) \\ &\geq \min\{p_i, P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)\} q_i - C_i(q_i). \end{aligned}$$

Cela contredit l'inégalité ci-dessus.

– deuxième cas : $p_i > P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$

On pose alors $p_i^{\{1\}} := P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) < p_i$.

On a alors par croissance de P ,

$$P(p_i^{\{1\}}, p_{-i}^*) \leq P(p_i, p_{-i}^*) \leq \Delta(q_i, q_{-i}^*).$$

– Si $(p_i^{\{1\}}, q_i)$ satisfait $p_i^{\{1\}} \leq P(p_i^{\{1\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$, alors on peut appliquer la condition (1) au couple $(p_i^{\{1\}}, q_i)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) &\geq p_i^{\{1\}} q_i - C_i(q_i) \\ &\geq \min\{p_i, P(p_i, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)\} \\ &\geq p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*), \end{aligned}$$

c'est-à-dire la contradiction désirée.

– Si au contraire $p_i^{\{1\}} > P(p_i^{\{1\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$, alors on pose $p_i^{\{2\}} := P(p_i^{\{1\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) < p_i^{\{1\}}$ et on recommence la discussion en remplaçant $p_i^{\{1\}}$ par $p_i^{\{2\}}$.

Si le processus s'arrête pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire si $p_i^{\{n\}}$ vérifie $p_i^{\{n\}} \leq P(p_i^{\{n\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$, alors on a la contradiction voulue.

Sinon, par le procédé décrit, on construit de proche en proche une suite strictement décroissante $(p_i^{\{k\}})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs (donc minorée par 0). Cette suite converge nécessairement vers un réel positif noté $p_i^{\{\infty\}}$ et elle vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_i^{\{k\}} \geq P(p_i^{\{k\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) = p_i^{\{k+1\}}.$$

Un passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ donne par continuité de P l'égalité $p_i^{\{\infty\}} = P(p_i^{\{\infty\}}, p_{-i}^*) \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*)$ et donc la contradiction cherchée. ■

Si l'espace des stratégies de chaque entreprise est réduit à une variable (les fonctions Π_i ne dépendent alors plus que de p ou q), on est en mesure de définir un équilibre en prix et en quantité.

Définition Dans le contexte de la situation étudiée,

– un équilibre en quantité est un n -uplet q^* tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$q_i^* \in \arg \max_{q_i \in \mathbb{R}_+} \{\partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)) q_i - C_i(q_i)\}.$$

– un équilibre en prix est un n -uplet p^* tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$p_i^* \in \arg \max_{p_i \in \mathbb{R}_+} \{p_i \partial_i P(p_i, p_{-i}^*) D(P(p_i, p_{-i}^*)) - C_i(\partial_i P(p_i, p_{-i}^*) D(P(p_i, p_{-i}^*)))\}.$$

3.2 Mise en évidence d'un lien entre les équilibres.

On propose ici dans l'optique d'un prolongement du travail de Claude d'Aspremont, Rodolphe Dos Santos Ferreira et Louis-André Gérard-Varet, une condition sous laquelle il est possible d'associer à tout équilibre en quantité q^* un équilibre en prix p^* tels que définis plus haut.

Proposition 12 *A tout équilibre en quantité q^* peut être associé l'équilibre oligopolistique faible (p^*, q^*) où p^* est défini par $\forall i, p_i^* = \partial_i Q(q^*) \Delta(Q(q^*))$.*

De plus, si les deux conditions suivantes sont satisfaites,

$$1. \forall p_i \in \mathbb{R}_+, Q(\partial_i P(p_i, p_{-i}^*) D(P(p_i, p_{-i}^*)), q_{-i}^*) = D(P(p_i, p_{-i}^*))$$

$$2. \forall i, q_i^* = \partial_i (P(p^*)) D(P(p^*))$$

alors (p^, q^*) est un équilibre oligopolistique et p^* est un équilibre en prix.*

Démonstration

Soit q^* un équilibre en quantité et considérons alors p^* tel que défini dans la proposition.

Supposons par l'absurde que (p^*, q^*) ne soit pas un équilibre oligopolistique faible. Alors le lemme 5 s'applique au vu de la définition de p^* si bien que

$$\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists (p_i, q_i), \begin{cases} p_i \leq \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) P(p_i, p_{-i}^*) \\ P(p_i, p_{-i}^*) \leq \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)) \end{cases} \text{ et } p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) < p_i q_i - C_i(q_i).$$

On a par suite

$$p_i \leq \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)),$$

puis

$$\begin{aligned} \partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)) q_i - C_i(q_i) &\geq p_i q_i - C_i(q_i) \\ &> p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*), \end{aligned}$$

soit encore

$$\partial_i Q(q_i, q_{-i}^*) \Delta(Q(q_i, q_{-i}^*)) q_i - C_i(q_i) > \partial_i Q(q^*) \Delta(Q(q^*)) q_i^* - C_i(q_i^*).$$

Mais cela contredit le fait que q^* soit un équilibre en quantité.

En somme, (p^*, q^*) est bien un équilibre oligopolistique faible.

On suppose à présent les deux conditions supplémentaires de la proposition satisfaites.

Ces deux conditions réunies, il est clair que $Q(q^*) = D(P(p^*))$, donc (p^*, q^*) est un équilibre oligopolistique.

Pour tout i , prenons $p_i \in \mathbb{R}_+$ et notons $q_i := \partial_i P(p_i, p_{-i}^*) D(P(p_i, p_{-i}^*))$.

On a dès lors en utilisant la première condition énoncée dans la proposition $Q(q_i, q_{-i}^*) = D(P(p_i, p_{-i}^*))$ et $q_i = Q(q_i, q_{-i}^*) \partial_i P(p_i, p_{-i}^*)$.

Comme (p^*, q^*) est un équilibre oligopolistique, on est en mesure d'appliquer le lemme 5. Il vient :

$$\begin{aligned} p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) &\geq p_i q_i - C_i(q_i) \\ p_i^* \partial_i P(p^*) D(P(p^*)) - C_i(\partial_i P(p^*) D(P(p^*))) &\geq p_i q_i - C_i(q_i), \end{aligned}$$

en utilisant la deuxième condition.

Cela montre que p^* est un équilibre en prix. ■

Remarque

On peut montrer de même que, sous l'hypothèse que les fonctions C_i sont des fonctions décroissantes sur \mathbb{R}_+ (l'hypothèse la plus vraisemblable serait de prendre les C_i constantes), il est possible d'associer à tout équilibre en prix p^* l'équilibre oligopolistique faible (p^*, q^*) où q^* est défini par $\forall i, q_i^* = \partial_i P(p^*) D(P(p^*))$. □

4 Estimation de systèmes non-linéaires.

4.1 Quelques définitions.

Un système d'équations général fait intervenir différents types de variables (aléatoires). On caractérise dans les définitions ci-dessous (reformulées à partir des définitions de Mittelhammer, Judge et Miller) les différents types de variables rencontrées.

Définition Une variable endogène est une variable qui apparaît comme dépendante des autres variables dans au moins une équation du système.

Définition Une variable exogène est une variable qui n'est déterminée par aucun paramètre du système, mais qui conditionne les issues des variables endogènes du système.

Définition Une perturbation aléatoire est une variable corrective (du type bruit) qui vient s'ajouter naturellement dans le système, qui peut dépendre ou non des autres paramètres.

Définition Une variable prédéterminée est une variable dont les valeurs ne sont ni déterminées ni affectées dans le présent ou dans le futur par les valeurs des perturbations aléatoires.

Par exemple, dans le cadre d'un marché où les quantités et les prix sont déterminés simultanément, ces deux variables sont endogènes.

Remarque

Les variables exogènes sont des variables prédéterminées. □

4.2 Notations utilisées.

A partir d'ici, si A désigne une matrice de taille $m \times p$, on notera systématiquement pour $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

- $A[i, j]$ le coefficient de la matrice A présent à la ligne i et à la colonne j ,
- $A[i, \cdot]$ le vecteur ligne formé des p éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A ,
- $A[\cdot, j]$ le vecteur ligne formé des m éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Si A désigne toujours la même matrice et B une matrice de taille $m' \times p'$, alors le produit de Kronecker²⁰ $A \otimes B$ de A et B est la matrice de taille $mm' \times pp'$ définie par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mp}B \end{bmatrix}.$$

Remarque

Il est à noter que l'ordre considéré pour A et B est important et qu'en particulier $A \otimes B \neq B \otimes A$ en général. □

Enfin, on notera I_q la matrice identité de $M_q(\mathbb{R})$ et on notera toujours les variables aléatoires en majuscules et leurs réalisations en minuscules.

4.3 Description des systèmes étudiés.

De manière générale en économétrie, on entend par système (non-linéaire) à n observations et q équations tout assemblage de relations entre variables endogènes, variables prédéterminées, variables de perturbation aléatoire qui prend la forme matricielle suivante, en indiquant par l'indice v (pour "vertical") le vecteur colonne correspondant à la lecture de la matrice dans l'ordre anti-lexicographique :

$$Y_v = g(M, \delta) + \epsilon_v,$$

où Y désigne une matrice $n \times q$ constituée de variables endogènes, ϵ désigne une matrice $n \times q$ de perturbations aléatoires et $g(M, \delta)$ désigne une matrice colonne $nq \times 1$ qui est fonction de variables endogènes (entre autres les

20. Il s'agit aussi d'un produit tensoriel de matrices.

$Y[i, j]$), des variables exogènes $X[i, j]$ ainsi que d'éventuels autres paramètres contenus dans δ , de sorte que le système peut se réécrire plus explicitement sous la forme :

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, Y[, j] = g_j(M_{(j)}, \delta_j) + \epsilon[, j],$$

avec

$$g(M, \delta) = \begin{bmatrix} g_1(M_{(1)}, \delta_1) \\ \vdots \\ g_q(M_{(q)}, \delta_q) \end{bmatrix}$$

et $M_{(j)}$ une matrice ligne comprenant d_j variables endogènes (coefficients de Y) et prédéterminées apparaissant dans la $j^{\text{ème}}$ ligne du système. Les δ_j sont des matrices lignes de longueur d_j .

4.4 Estimation des systèmes non-linéaires, méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

On conserve bien sûr les notations du paragraphe précédent.

4.4.1 Idée générale de l'estimation.

D'un point de vue statistique et expérimental, supposant que M ne comprenne que des termes $Y[i, j]$ et $X[k, l]$, $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$ (ce que l'on fera en pratique), on cherche à connaître le comportement de q variables Y_1, \dots, Y_q en fonction de r variables X_1, \dots, X_r . On réalise pour cela un certain nombre de simulations ou observations n (correspondant aux n lignes des matrices Y , X et ϵ) ; chaque ligne de Y et de X correspond aux valeurs prises (réalisations) respectivement par Y_1, \dots, Y_q et X_1, \dots, X_r .

Estimer un tel système non-linéaire revient ainsi à estimer les coefficients qui interviennent dans les q relations liant les Y_j aux X_i .

4.4.2 L'estimateur du maximum de vraisemblance.

On fait ici l'hypothèse que les vecteurs ligne aléatoires $\epsilon[i, \cdot]$ de la matrice ϵ sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale $\mathcal{N}(0_q, \Sigma)$.

Notant $\mathcal{S}_q^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble (ouvert²¹) de $M_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques définies positives, on considère le modèle statistique paramétrique associé à la situation étudiée où $\Sigma \in \mathcal{S}_q^{++}(\mathbb{R})$ et $\delta \in \mathbb{R}^d$, où $d = \sum_{j=1}^q d_j$.

On supposera que ce modèle est régulier.

En notation vectorielle, $Y_v - g(M, \delta)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma \otimes I_q)$.

La fonction de log-vraisemblance du modèle au point de paramètre (δ, Σ) et évaluée en (x_v, y_v) est par conséquent donnée par :

$$\mathcal{L}_{(\delta, \Sigma)}(x_v, y_v) = -\frac{nq}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^n \ln(|\det(J_i)|) - \frac{n}{2} \ln(\det \Sigma) - \frac{1}{2} (y_v - g(m, \delta))^t (\Sigma^{-1} \otimes I_q) (y_v - g(m, \delta)),$$

où comme dans [7], on a noté par J_i le jacobien de l'application transformant les $\epsilon[i, \cdot]$ en les $Y[i, \cdot]$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de (δ, Σ) est par définition :

$$(\hat{\delta}, \hat{\Sigma}) = \arg \max_{(\delta, \Sigma)} (\mathcal{L}_{(\delta, \Sigma)}(X, Y)).$$

21. Cette propriété topologique est par exemple une conséquence du critère de Sylvester sur les mineurs principaux qui donne une condition ouverte en termes de déterminants.

L'EMV précédent est faiblement consistant (c'est-à-dire $(\hat{\delta}, \hat{\Sigma})$ converge en probabilité vers (δ, Σ)). L'espace des paramètres étant un ouvert, le modèle étant régulier et l'EMV étant faiblement consistant, $(\hat{\delta}, \hat{\Sigma})$ vérifie la propriété d'efficacité et de normalité asymptotique. On a ainsi la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{n} \left((\hat{\delta}, \hat{\Sigma}) - (\delta, \Sigma) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, I(\delta, \Sigma)^{-1}),$$

où $I(\delta, \Sigma)$ désigne la matrice d'information de Fisher évaluée en (δ, Σ) .

4.4.3 Implémentation avec le logiciel R.

On rédige un programme nommé **EMV.R** permettant d'estimer le système suivant, pris pour exemple par les auteurs du livre [7] :

$$\left\{ \begin{array}{l} y[1] = b[1] \cdot y[2] + b[2] \cdot (y[2] \cdot * x[1]) + b[3] \cdot x[2] + b[4] \cdot x[3] + b[5] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \epsilon[1] \\ y[2] = b[6] \cdot y[1] + b[7] \cdot x[4] + b[8] \cdot x[5] + b[9] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \epsilon[2] \end{array} \right\},$$

où les notations x , y et ϵ correspondent à celles des paragraphes précédents. Les $b[i]$ sont des réels correspondant aux composantes de δ et de Σ avec les notations du paragraphe précédent ; par défaut, le programme **EMV.R** implémenté prend $b = (0.1, -0.1, 2, 1, 0.15, -0.5, 1, 2, 1)$. Le système comporte ainsi $q = 2$ lignes.

On génère $n = 100$ échantillons pour chaque $x[i]$ et $\epsilon[j]$. On choisit d'extraire des échantillons issus d'une loi $\mathcal{U}([0, 1])$ pour $x[1]$, des échantillons issus d'une loi $\mathcal{U}([0, 3])$ pour $x[2], x[3], x[4]$ et $x[5]$ et des échantillons issus d'une loi $\mathcal{N}(0_2, K)$ pour les $\epsilon[i]$, où la matrice de variance-covariance K est prise égale à

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le programme comprend deux parties.

- Une première partie est consacrée au calcul d'une valeur de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) \hat{b} de b . Cette partie comprend la résolution du système (par le calcul des $y[i, j]$) avec b considéré, l'écriture de la fonction de logvraisemblance qui prend pour argument un b générique de même taille que le précédent (lequel on cherche à estimer et représente les vraies valeurs du paramètre), ainsi que le calcul de l'EMV de b en utilisant la fonction "optim".
- La seconde partie consiste à évaluer la matrice de variance-covariance de l'EMV de b . Pour cela, on procède par rééchantillonnage des valeurs de ϵ . On réalise en quelque sorte $N = 500$ fois le programme correspondant à la première partie, ce qui permet d'obtenir une bonne approximation de l'espérance de \hat{b} et donc aussi une bonne approximation de la matrice de variance-covariance de \hat{b} , utilisant les estimateurs classiques pour l'espérance et la matrice de variance-covariance.

4.5 Une méthode classique de résolution des systèmes, la méthode de Newton-Raphson.

On présente dans cette partie l'algorithme de Newton-Raphson qui est utilisé par exemple dans les méthodes d'optimisation.

Présentation dans le cas général de n variables.

L'objectif est de résoudre un système de n équations à n inconnues, ce qui revient à trouver un zéro d'une fonction F définie sur une partie de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

La fonction F précédente doit être supposée différentiable. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on notera $F'(x)$ ou $Jac_x F$ la matrice jacobienne de F au point x . On désignera aussi par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

La méthode de Newton-Raphson consiste à construire une suite de points $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \geq 0, x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k) \end{cases}.$$

Si l'on se fixe comme critère d'arrêt le fait de trouver $x_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|F(x_k)\| \leq \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ choisi comme erreur d'approximation, l'algorithme de Newton-Raphson (visant à donner une solution x à $F(x) = 0$) peut être décrit de la manière suivante.

1. Choisir comme valeur initiale $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Tant que $\|F(x)\| > \epsilon$, résoudre le système linéaire $F'(x) \times v = F(x)$ d'inconnue $v \in \mathbb{R}^n$ puis remplacer x par $x + v$.
3. Afficher x .

Illustration dans le cas d'une variable réelle.

Dans le cas d'une seule variable (correspondant à $n = 1$), la relation de récurrence définissant la suite (x_k) de Newton-Raphson devient :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}.$$

L'intérêt d'évoquer le cas $n = 1$ réside dans le fait qu'on comprend plus facilement d'où vient la formule.

La méthode de Newton-Raphson consiste à approximer la fonction F au premier ordre : partant d'un point x_0 (que l'on choisit de préférence proche d'un zéro de F), on assimile le graphe de F à sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$, qui a pour équation

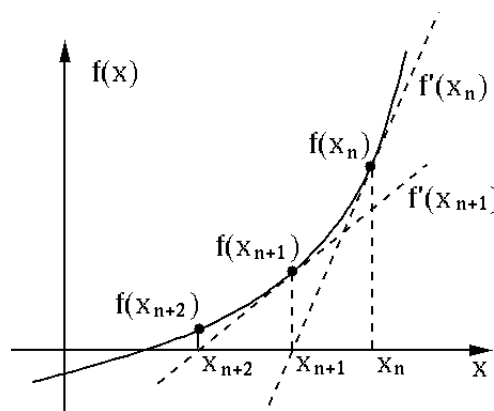
$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est un point d'abscisse x_1 qui approche en général mieux le zéro de F que x_0 et qui est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

On recommence ensuite en considérant la tangente au graphe de F au point d'abscisse x_1 et son intersection avec l'axe des abscisses, ce qui donne un point x_2 , et ainsi de suite...

La figure ci-dessous donne une visualisation graphique de la méthode de Newton-Raphson pour le cas $n = 1$. Partant du point d'abscisse x_n , on voit comment est obtenu le point d'abscisse x_{n+1} puis le point x_{n+2} .



Convergence et ordre de la méthode de Newton-Raphson.

On donne ici un théorème qui permet de garantir la convergence de la suite de Newton-Raphson sous certaines conditions.

On notera $Jac_x F$ la matrice jacobienne de F au point x (pour une écriture matricielle) et dF_x la différentielle de F au point x (pour une écriture en termes d'applications linéaires).

De plus, $GL(n, \mathbb{R})$ désignera le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles et $GL(\mathbb{R}^n)$ désignera l'ensemble des automorphismes de \mathbb{R}^n .

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on notera $\mathcal{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et $\mathcal{B}_f(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$ la boule fermée de centre x et de rayon r .

THÉORÈME 4.1 —

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ et soit $x^* \in \mathcal{U}$ tel que $F(x^*) = 0$ et $\text{Jac}_{x^*} F \in GL(n, \mathbb{R})$.

Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout x dans $\mathcal{B}(x^*, r)$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x$ et par la relation de récurrence donnée par la méthode de Newton-Raphson converge vers x^* .

Démonstration

On rappelle que $GL(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^n . Comme dF est continue sur \mathcal{U} ,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{B}(x^*, \eta), dF_x \in GL(\mathbb{R}^n).$$

Considérons l'application

$$G : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(x^*, \eta) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x - dF_x^{-1}(F(x)) \end{array}$$

qui est alors bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{B}(x^*, \eta)$.

Utilisant que l'application

$$Inv : \begin{array}{ccc} GL(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array}$$

est différentiable en tout point u de $GL(\mathbb{R}^n)$ et

$$\forall u, h \in GL(\mathbb{R}^n), dInv_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1},$$

nous avons : pour $x \in \mathcal{B}(x^*, \eta)$ et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} dG_x(y) &= y + dF_x^{-1} \circ d^2 F_x(y, \cdot) \circ dF_x^{-1}(F(x)) - dF_x^{-1}(dF_x(y)) \\ &= dF_x^{-1} \left(d^2 F_x \left(y, dF_x^{-1}(F(x)) \right) \right). \end{aligned}$$

Comme $F(x^*) = 0$, on a donc $\forall y \in \mathbb{R}^n, dG_{x^*}(y) = 0$, d'où $dG_{x^*} = 0$.

De plus dG est continue sur $\mathcal{B}(x^*, \eta)$, donc pour $0 < k < 1$ fixé :

$$\exists 0 < r < \eta, \forall x \in \mathcal{B}_f(x^*, r), \|dG_x - dG_{x^*}\| \leq k < 1,$$

où on a noté par $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.²²

L'inégalité des accroissements finis montre alors que G est k -contractante sur la partie complète $\mathcal{B}_f(x^*, r)$ de \mathbb{R}^n .

Ainsi, la suite définie par la relation de récurrence faisant intervenir la fonction G est convergente vers l'unique point fixe de G sur $\mathcal{B}_f(x^*, r)$, à savoir x^* (car on vérifie aisément que $G(x^*) = x^*$). Le résultat utilisé ici est le théorème du point fixe pour les espaces métriques complets (dont la preuve consiste à montrer que la suite est de Cauchy).

On donne à présent un résultat de vitesse de convergence de la méthode de Newton-Raphson. On conserve les notations F et G précédentes.

Proposition 13 *Supposons que $dG_{x^*} = 0$ et G soit de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert contenant x^* .*

Alors le théorème précédent s'applique et l'ordre de convergence de la méthode de Newton est 2.

Démonstration

Cela repose sur l'inégalité de Taylor-Lagrange, écrite à l'ordre 2. ■

Les limites de la méthode de Newton-Raphson.

Terminons la description de la méthode de Newton-Raphson par ses limites, en citant l'essentiel des éléments qui peuvent la faire échouer.

- Les limites de l'algorithme.

22. Cette dernière est définie pour tout endomorphisme u de \mathbb{R}^n par $\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

1. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il se peut que x_k ne soit pas contenu dans le domaine de définition de F , auquel cas l'algorithme s'arrête.
 2. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il se peut que la matrice jacobienne de F en x_k ne soit pas inversible, auquel cas l'algorithme s'arrête.
 3. La méthode peut ne pas converger et donc l'algorithme peut continuer à tourner indéfiniment si la fonction F n'est pas différentiable en la vraie solution.
 4. La méthode peut aussi ne pas converger ou aboutir si x_0 est trop éloigné d'un zéro de F .
 5. Si la dimension n du système est grande, le calcul de la matrice jacobienne peut prendre beaucoup de temps; de même, pour chaque k , la résolution du système linéaire $F'(x_k) \times v = F(x_k)$ est une opération coûteuse en calculs.
- Les limites d'applications.

Contrairement à un algorithme du type Nelder-Mead, la fonction F ne doit pas être seulement supposée continue, mais aussi différentiable; dans le cas contraire, la méthode ne s'applique pas.

Implémentation de la méthode de Newton-Raphson avec le logiciel R.

On implémente l'algorithme de Newton-Raphson en utilisant le logiciel R et en cherchant d'éventuels zéros des deux fonctions suivantes :

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 - 5 \\ e^{x_1} + x_2 - 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + \sin x_2 - \cos x_3 + 1 - \pi \\ 2 \sin x_1 - x_2^2 - 2 + \pi^2 \\ \cos(x_1 + x_3^2) \end{pmatrix} .$$

On renseigne dans le programme **newton-raphson.R** les expressions des fonctions ainsi que celles de leurs dérivées. Partant de $x_0 = (-5, 3)$, l'exécution du programme avec R montre que le point $x = (-5.651450, 2.996491)$ vérifie $\|F(x)\| \leq 0.01$.

On vérifie aisément que le point $x^* = \left(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0\right)$ est un zéro de G . Partant de $x_0 = (1, -3, 0.5)$, le programme fournit $x = (1.57078365, -3.14159275, 0.07465488)$ comme premier point vérifiant $\|G(x)\| \leq 0.01$. Comparant les deux éléments de \mathbb{R}^3 , on constate que la valeur fournie par le programme est satisfaisante.

Notons que l'exécution du programme **newton-raphson.R** est assez rapide pour les deux fonctions étudiées.

Conclusion et Remerciements.

Ce stage aura été pour moi très intéressant et très riche puisqu'il m'a permis d'élargir ma culture scientifique en comprenant comment les outils mathématiques peuvent être appliqués et utilisés en économie. En outre, j'ai su mettre mon savoir-faire et mes connaissances mathématiques au service de l'économie théorique. Par ailleurs, ce stage aura été l'occasion de tisser un premier lien avec le monde de la recherche car j'ai non seulement travaillé avant tout à partir de documents extraits de la littérature économique, mais j'ai en plus eu l'occasion d'échanger pour la première fois avec des étudiants préparant une thèse de doctorat.

Je tiens enfin à remercier l'équipe de la faculté des sciences économiques et de gestion de Strasbourg qui m'a donné la possibilité d'effectuer mon stage de mathématiques appliquées dans leur établissement et plus particulièrement Bertrand Koebel qui m'a guidé durant cette période de stage en me proposant la découverte et la lecture de plusieurs ouvrages et articles issus de la presse économique et qui a passé du temps à la relecture de mon travail et à l'amélioration de la rédaction.

Références

- [1] Rabah Amir, *Supermodularity and Complementarity in Economics : An Elementary Survey*. Southern Economic Journal, Vol. 71, No. 3, 2005.
- [2] Rabah Amir, Philip Erickson et Jim Jin, *On the microeconomic foundations of linear demand for differentiated products*. Juillet 2015.
- [3] Claude d'Aspremont, Rodolphe Dos Santos Ferreira, *Price-quantity competition with varying toughness*. Games and Economic Behavior 65, 62-82, 2008.
- [4] Claude d'Aspremont, Rodolphe Dos Santos Ferreira et Louis-André Gérard-Varet, *Competition for Market Share or for Market Size : Oligopolistic Equilibria with Varying Competitive Toughness*. International Economic Review, Vol. 48, No. 3, 2007.
- [5] Charles D. Kolstad et Lars Mathiesen, *Necessary and Sufficient Conditions for Uniqueness of a Cournot Equilibrium*. Review of Economic Studies, 1987.
- [6] Ngo Van Long et Antoine Soubeyran, *Existence and Uniqueness of a Cournot Equilibrium : A Contraction Mapping Approach*. CIRANO, Montréal, Juin 1999.
- [7] Ron C. Mittelhammer, George G. Judge et Douglas J. Miller, *Econometric Foundations*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] John C. Nash, *Nonlinear Parameter Optimization Using R Tools*. Telfer School of Management, University of Ottawa. Wiley, 2014.
- [9] Paul A. Ruud, *An introduction to Classical Econometric Theory*. Oxford University Press, 2000.
- [10] Nirivkar Singh et Xavier Vives, *Price and quantity competition in a differentiated duopoly*. Rand Journal of Economics, Vol. 15, No. 4, 1984.
- [11] Hugo Sonnenschein, *The Dual of Duopoly Is Complementary Monopoly : or Two of Cournot's Theories Are One*. The Journal of Political Economy, Vol. 76, No. 2, 1968.
- [12] Hal R. Varian, *Microeconomic Analysis*. University of California at Berkeley.
- [13] Xavier Vives, *Oligopoly Pricing, Old Ideas and New Tools*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1999.

Annexe au paragraphe 4 : les fichiers .R

4.6 Le fichier EMV.R

```
#
# Estimation d'un exemple de système non-linéaire avec la méthode du
# maximum de vraisemblance.
#
# Exemple correspondant au chapitre 17.4 de "Econometric Foundations", inspiré du programme G
C17NL.gss
# système non-linéaire "à q=2 deux colonnes" étudié :
#
#y[,1]=b[1]*y[,2]+b[2]*(y[,2].*x[,1])+b[3]*x[,2]+b[4]*x[,3]+b[5]*ones(n,1)+e[,1]
#y[,2]=b[6]*y[,1]+b[7]*x[,4]+b[8]*x[,5]+b[9]*ones(n,1)+e[,2]
#
# Chaque vecteur ligne du terme de correction suit une loi normale  $N((O,O),K)$ .
#
# 1) Calcul d'une valeur de l'EMV de b.
#
# Nombre d'observations (ou encore nombre de lignes au système)
n<-100
#
# Le processus générateur de données
#
# Le vecteur b représente les vraies valeurs des paramètres
b <- c(0.1, -0.1, 2, 1, 0.15, -0.5, 1, 2, 1)
#
# Les variables "explicatives"
x<-matrix(NA, nrow=n, ncol=5)
x[,1] <- runif(n, min=0, max=1)
x[,2] <- runif(n, min=0, max=3)
x[,3] <- runif(n, min=0, max=3)
x[,4] <- runif(n, min=0, max=3)
x[,5] <- runif(n, min=0, max=3)
#
# Les termes d'erreurs du système
#
aux<-matrix(NA, nrow=n, ncol=2)
aux[,1] <- rnorm(n, mean=0, sd=1)
aux[,2] <- rnorm(n, mean=0, sd=1)
# matrice de covariance du terme "de correction" epsilon
K<-matrix(c(0.5, -0.25, -0.25, 1), nrow=2)
e<-aux%%chol(K)
#
# résolution du système (calcul des coefficients y[i,j])
#
gam<-matrix(c(1, 0, 0, 1), nrow=2)
y<-matrix(NA, nrow=n, ncol=2)
for (i in 1:n)
{
  gam[1,2] <- -b[6]
  gam[2,1] <- -b[1] - b[2]*x[i,1]
  y[i,] <- -(x[i,]%%matrix(c(0, b[3], b[4], 0, 0, 0, 0, 0, b[7], b[8]), nrow=5)+c(b[5], b[9])
    +e[i,])%%solve(gam)
```

```

}
#
# fonction de log-vraisemblance (en fait son opposé)
#
logvraisemblance<-function(b)
{
resid1<-y[,1] - ( b[1]*y[,2]+b[2]*y[,2]*x[,1]+b[3]*x[,2]+b[4]*x[,3]+b[5] )
resid2<-y[,2] - ( b[6]*y[,1]+b[7]*x[,4]+b[8]*x[,5]+b[9] )
resid<-cbind(resid1 , resid2)
sigmahat<-t(resid)%*%resid/n
terme_jacob<-0
  for (i in 1:n)
  {
    terme_jacob<-terme_jacob + log(abs(1 - b[1]*b[6] - b[2]*b[6]*x[i,1]))
  }
logV<- terme_jacob -0.5*n*log(det(sigmahat))-0.5*n*2*log(2*pi)
return(-logV)
}
#
# estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de b.
#
b0<-b
EMV<-optim(b0, logvraisemblance)
EMV$par
b
#
#
# On voit qu'on est proche des vraies valeurs (la loi des grand nombres
# nous dit qu'en augmentant n on peut se rapprocher encore davantage des vraies valeurs b)
#
#
### 2) Détermination de la matrice de variance-covariance de l'EMV par rééchantillonnage
#
#
# Nombre d'observations (ou encore nombre de lignes au système)
n<-100
#
# Le processus générateur de données
#
# Le vecteur b représente les vraies valeurs des paramètres
#
b <- c(0.1, -0.1, 2, 1, 0.15, -0.5, 1, 2, 1)
# Les variables "explicatives"
x<-matrix(NA, nrow=n, ncol=5)
x[,1]<-runif(n, min=0, max=1)
x[,2]<-runif(n, min=0, max=3)
x[,3]<-runif(n, min=0, max=3)
x[,4]<-runif(n, min=0, max=3)
x[,5]<-runif(n, min=0, max=3)
#
#
#
# Nombre de valeurs de l'EMV de b calculées.
N<-500
#

```

```

# Calcul des N valeurs de l'EMV de b.
#
EMV_valeurs<-matrix(NA,nrow=N,ncol=length(b))
for (j in 1:N)
{
# termes d'erreur du système
#
aux<-matrix(NA,nrow=n,ncol=2)
aux[,1]<-rnorm(n,mean=0,sd=1)
aux[,2]<-rnorm(n,mean=0,sd=1)
# matrice de covariance du terme "de correction" epsilon
K<-matrix(c(0.5,-0.25,-0.25,1),nrow=2)
e<-aux%*%chol(K)
#
# résolution du système (calcul des coefficients y[i,j])
#
gam<-matrix(c(1,0,0,1),nrow=2)
y<-matrix(NA,nrow=n,ncol=2)
  for (i in 1:n)
  {
    gam[1,2]<- -b[6]
    gam[2,1]<- -b[1] - b[2]*x[i,1]
    y[i,]<-(x[i,]%*%matrix(c(0,b[3],b[4],0,0,0,0,0,b[7],b[8]),nrow=5)+c(b[5],b[9])
      +e[i,])%*%solve(gam)
  }
#
# procédure (imbriquée) déterminant l'opposé de la logvraisemblance.
#
logvraisemblance<-function(b)
{
  resid1<-y[,1] - ( b[1]*y[,2]+b[2]*y[,2]*x[,1]+b[3]*x[,2]+b[4]*x[,3]+b[5] )
  resid2<-y[,2] - ( b[6]*y[,1]+b[7]*x[,4]+b[8]*x[,5]+b[9] )
  resid<-cbind(resid1,resid2)
  sigmahat<-t(resid)%*%resid/n
  terme_jacob<-0
  for (i in 1:n)
  {
    terme_jacob<-terme_jacob + log(abs(1 - b[1]*b[6] - b[2]*b[6]*x[i,1]))
  }
  logV<- terme_jacob -0.5*n*log(det(sigmahat))-0.5*n*2*log(2*pi)
  return(-logV)
}
#
# estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de b.
#
MV<-optim(b,logvraisemblance)
EMV_valeurs[j,]<-MV$par
}
#
# espérance de l'EMV
esp<-apply(EMV_valeurs,2,mean)
esp
#
# On voit ainsi que l'EMV est asymptotiquement non-biaisé pour b.
#
#

```

```

# matrice de variance-covariance
aux_covar<-matrix(0,nrow=length(b),ncol=length(b))
for (i in 1:N)
{
ecart<-t(EMV_valeurs[i,]-esp)
aux_covar<-aux_covar+t(ecart)%*%ecart
}
covar<-aux_covar/N
covar
#

```

4.7 Le fichier newton-raphson.R

```

# Résolution d'un système non-linéaire avec la méthode de Newton-Raphson.
# système à résoudre :  $f(x)=0$ , où  $x$  est dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposée
# dérivable.
#
# procédure permettant d'approximer une solution de  $f(x)=0$  à partir d'un
# vecteur initial  $x_0$ .
# f1 désigne la dérivée de  $f$  (ou encore la matrice jacobienne de  $f$ ).
# epsilon désigne la marge d'erreur qu'on s'autorise : plus explicitement,
# dès que  $\|f(x)\| \leq \text{epsilon}$ , on s'arrête et on considère que  $x$  trouvé est
# une solution.
#
systeme<-function(f,f1,x_0,epsilon)
{
x<-x_0
y<-f(x)
z<-f1(x)
N<-sum(y*y)
while (N>epsilon)
{
x<-x-solve(z,y)
y<-f(x)
z<-f1(x)
N<-sum(y*y)
}
x
}
#
#
# Fonction f
f<-function(x) # x a 3 composantes
{
y<-c(x[1]^2-3*x[2]^2-5,exp(x[1])+x[2]-3)
y
}
# Sa dérivée  $f'$  (en fait sa matrice jacobienne)
f1<-function(x)
{
y<-matrix(c(2*x[1],exp(x[1]),-6*x[2],1),nrow=2)
y
}
# Approximation d'un zéro de f
X<-systeme(f,f1,c(-5,3),0.0001)
X
#

```



```

#
#
# Fonction g
g<-function(x) # x a 3 composantes
{
  y<-c(2*x[1]+sin(x[2])-cos(x[3])+1-pi,
        2*sin(x[1])-x[2]^2-2+pi^2,
        cos(x[1]+x[3]^2))
  y
}
# Sa dérivée g' (en fait sa matrice jacobienne)
g1<-function(x)
{
  y<-matrix(c(2,2*cos(x[1]),-sin(x[1]+x[3]^2),cos(x[2]),-2*x[2],0,
              sin(x[3]),0,-2*x[3]*sin(x[1]+x[3]^2)),nrow=3)
  y
}
# Approximation d'un zéro de g
X<-systeme(g,g1,c(1,-3,0.5),0.0001)
X
#

```